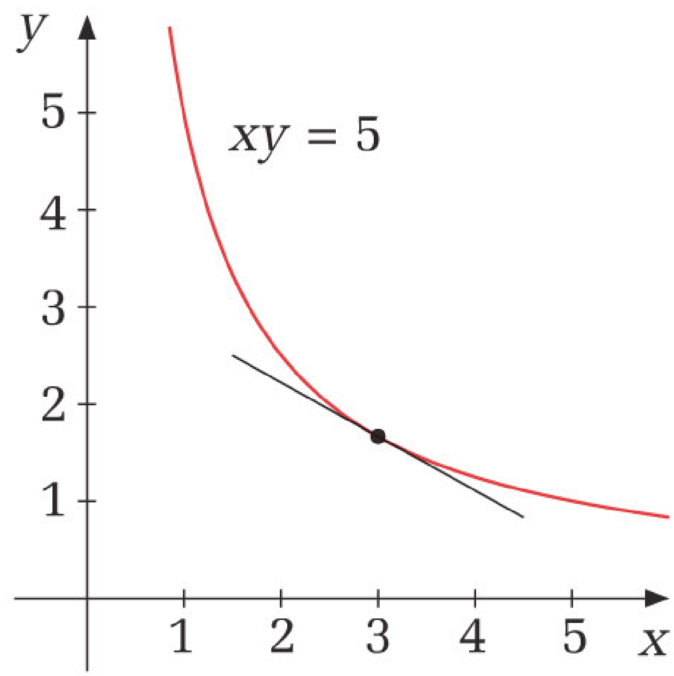
Überblick

$$xy = 5 \qquad (*)$$



Wenn $x = 1$, ist $y = 5$.

Wenn $x = 3$, ist $y = 5/3$.

Wenn $x = 5$, ist $y = 1$.

Für jedes $x \neq 0$ gibt es ein y, so dass (x, y) Gleichung (*) erfüllt.

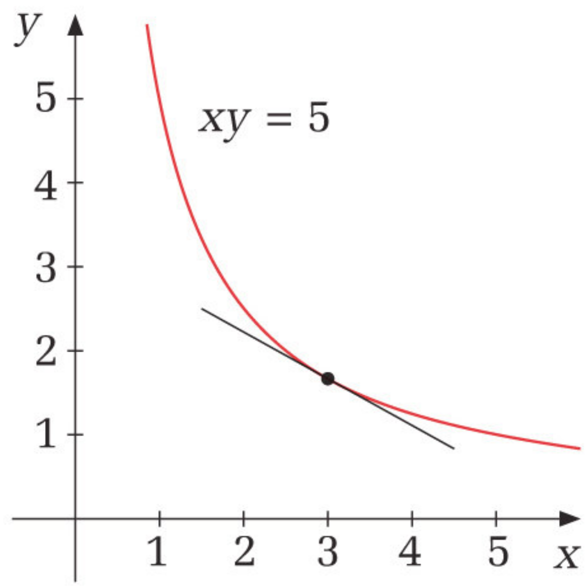
Gleichung (*) **DEFINIERT** y **IMPLIZIT** als Funktion von x.

$$xy = 5 \qquad (*)$$

(*) **DEFINIERT** y **IMPLIZIT** als Funktion von x: $y = f(x)$

Gesucht ist die **Steigung der Tangente**, d.h die **Ableitung** y' von y nach x.

$$xf(x) = 5 \quad (x \neq 0)$$



- Wir **differenzieren beide Seiten** nach x.
- Die **Ableitungen beider Seiten** sind **gleich**
- Die rechte Seite ist **konstant**.
- Die Ableitung der rechten Seite ist **Null**.
- Wir leiten die linke Seite nach der Produktregel ab:

$$1 \cdot f(x) + xf'(x) = 0 \qquad (**)$$

$$1 \cdot f(x) + x f'(x) = 0 \qquad (**)$$

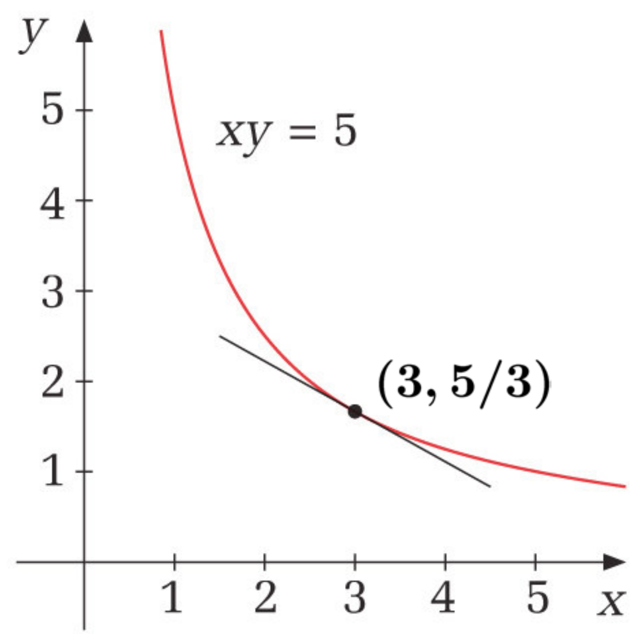
$$\Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{f(x)}{x} \qquad (x \neq 0)$$

$$\Longrightarrow \quad y' = -\frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

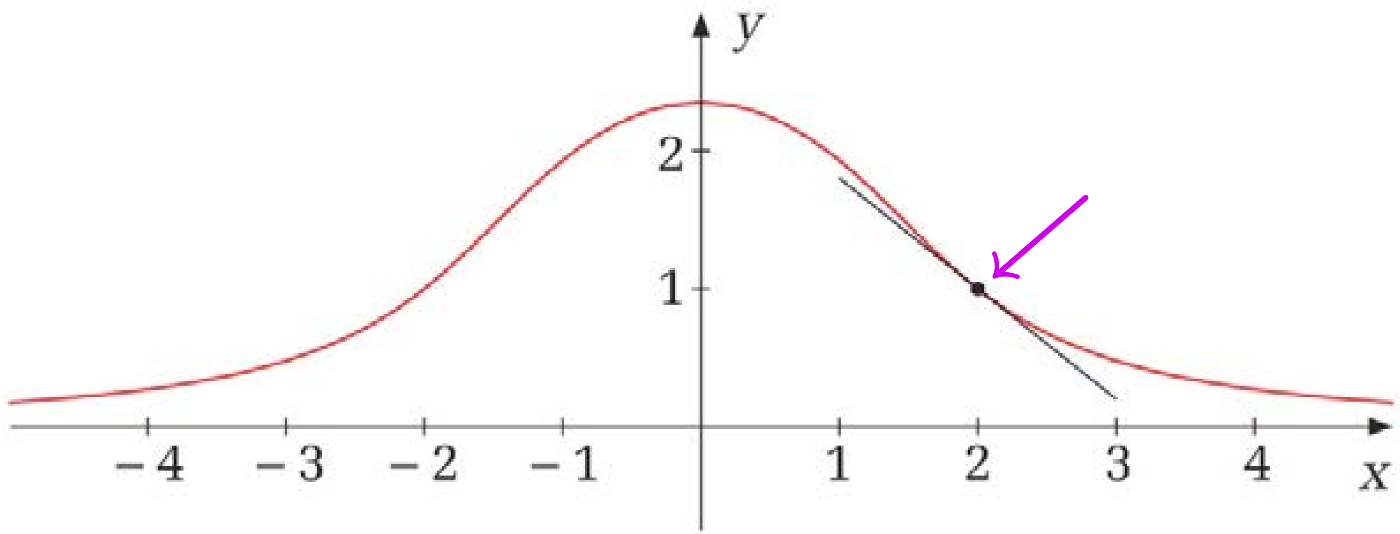
Für $(x, y) = (3, 5/3)$ gilt:

$$y' = -(5/3)/3 = -5/9$$

(Hier gibt es eine andere Möglichkeit zum Ergebnis zu kommen, siehe Buch!)



$$y^3 + 3x^2y = 13$$



Der Graph verläuft durch $(2, 1)$.

Bestimmen Sie die **Steigung** in $(2, 1)$.

$$y^3 + 3x^2y = 13 \qquad (*)$$

(*) **DEFINIERT** y **IMPLIZIT** als Funktion von x: $y = f(x)$

- Wir **differenzieren beide Seiten** nach x.
- Die **Ableitungen beider Seiten** sind **gleich**.
- Die rechte Seite ist **konstant**.
- Die Ableitung der rechten Seite ist **Null**.
- Wir leiten die linke Seite nach der Summen- und Produktregel ab:

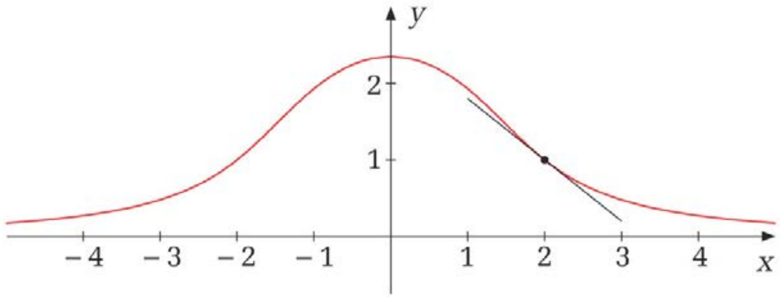
$$(y^3 + 3x^2y)' = \underbrace{(y^3)'}_{3y^2y'} + 6xy + 3x^2y' = 0$$

$$(y^3 + 3x^2y)' = \underbrace{\left(y^3\right)'}_{3y^2y'} + 6xy + 3x^2y' = 0$$

$$3y^2y' + 6xy + 3x^2y' = 0 \iff$$

$$y'(3y^2 + 3x^2) = -6xy \iff$$

$$y' = \frac{-6xy}{3x^2 + 3y^2} = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$$



In $(2, 1)$, d.h. für $x = 2$ und $y = 1$ gilt:

$$y' = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2 + 1^2} = -\frac{4}{5}$$

Wenn **zwei Variablen** x und y über eine **Gleichung in Beziehung** stehen, erhält man y', indem man

a) **beide Seiten** der Gleichung nach x **differenziert**, dabei y **als Funktion von** x betrachtet. (Gewöhnlich braucht man dabei die **Kettenregel**.)

b) die **resultierende Gleichung** nach y' **auflöst**.

Beispiel 1: $xy = 5$ Dort: $\underbrace{y + xy' = 0}_{\iff y' = -y/x}$

- Wir differenzieren erneut implizit nach x,
- d.h. wir differenzieren auf beiden Seiten nach x.

$$y' + y' + xy'' = 0$$

Einsetzen von $y' = -y/x$ ergibt:

$$-2y/x + xy'' = 0 \iff y'' = \frac{2y}{x^2}$$

Da $y = 5/x$ folgt: $y'' = 10/x^3$

In diesem Fall ist auch direktes Differenzieren möglich!

Beispiel 1: Makroökonomisches Modell für geschlossene Wirtschaft:

(i) $Y = C + I$ (ii) $C = f(Y)$

Y Volkseinkommen, C Konsum, I Investition

Annahme: Grenzneigung zum Konsum: $0 < f'(Y) < 1$

(a) $C = f(Y) = 95.05 + 0.712Y$

Verwenden Sie (i) und (ii), um Y als Funktion von I auszudrücken.

Lösung:

$$Y = 95.05 + 0.712Y + I \iff Y - 0.712Y = 95.05 + I$$

$$Y = (95.05 + I)/(1 - 0.712) \approx 3.47I + 330.03$$

$dY/dI \approx 3.47$, d.h. wenn I **um 1Mio. Euro steigt**, **steigt das Volkseinkommen** Y um ungefähr 3.47 Mio. Euro

Beispiel 1(b):

(i) $Y = C + I$ (ii) $C = f(Y)$

(ii) in (i) ergibt: $Y = f(Y) + I$

<u>Annahme:</u> Y wird durch diese Gleichung als differenzierbare Funktion von I definiert.

Gesucht ist dY/dI .

<u>Lösung:</u> Beide Seiten nach I differenzieren (Kettenregel beachten!):

$$\frac{dY}{dI} = f'(Y)\frac{dY}{dI} + 1 \iff \frac{dY}{dI}[1 - f'(Y)] = 1$$

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - f'(Y)}$$

Beispiel 1(b): Interpretation der Lösung:

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - f'(Y)}$$

$$f'(Y) = 1/2 \quad \Longrightarrow \quad dY/dI = 2$$

$$f'(Y) = 0.712 \quad \Longrightarrow \quad dY/dI = 3.47$$

$$0 < f'(Y) < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1 - f'(Y) < 1 \quad \Longrightarrow$$

$$dY/dI = 1/(1 - f'(Y)) > 1$$

- Ein Anstieg der Investition um 1 Mio. Euro führt zu einem Anstieg des Volkseinkommens von mehr als 1 Mio.
- Je größer $f'(Y)$, desto größer dY/dI.

Beispiel 1(c):

$$\boldsymbol{Y = f(Y) + I}$$ Bestimmen Sie : $\boldsymbol{Y'' = d^2Y/dI^2}$

Lösung: $$\frac{dY}{dI} = f'(Y)\frac{dY}{dI} + 1$$

Beide Seiten nach $\boldsymbol{I}$ differenzieren (Kettenregel beachten!):

$$\frac{d^2Y}{dI^2} = \left(f''(Y)\frac{dY}{dI}\right)\frac{dY}{dI} + f'(Y)\frac{d^2Y}{dI^2}$$

$$\frac{d^2Y}{dI^2}(1 - f'(Y)) = f''(Y)\left(\frac{dY}{dI}\right)^2 = \frac{f''(Y)}{(1 - f'(Y))^2},$$

da $$\frac{dY}{dI} = 1/(1 - f'(Y))$$

$$\boxed{\frac{d^2Y}{dI^2} = \frac{f''(Y)}{[1 - f'(Y)]^3}}$$

Beispiel 2: Angebot und Nachfrage mit Verbrauchersteuer

Nachfrage: $\boldsymbol{D = a - b(P + t)}$ Angebot: $\boldsymbol{S = \alpha + \beta P}$

$\boldsymbol{t}$ Steuern vom Verbraucher $\boldsymbol{a, b, \alpha, \beta}$ positive Konstanten

Gleichgewichtspreis: $\boldsymbol{a - b(P + t) = \alpha + \beta P}$ (**)

(**) definiert Preis $\boldsymbol{P}$ implizit als Funktion des Steuersatzes $\boldsymbol{t}$.

Bestimmen Sie $\boldsymbol{dP/dt}$.

Lösung:

$$\boldsymbol{-b(dP/dt + 1) = \beta dP/dt \implies (b + \beta)dP/dt = -b \implies}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = \frac{-b}{b + \beta} < 0}}$$

Der **Preis** des Produzenten **fällt**, wenn der **Steuersatz steigt**.

Wenn f eine **eineindeutige (umkehrbar eindeutige) Funktion** auf einem Intervall I ist, hat f eine **inverse Funktion** g, definiert auf dem Wertebereich von f.

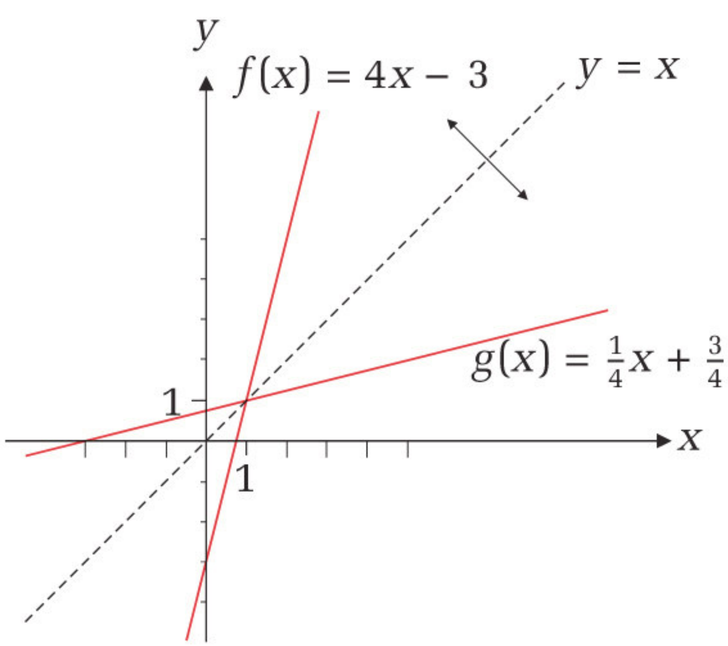
Welche Beziehung besteht zwischen den **Ableitungen** von f und g?

Beispiel 1:

$$f(x) = ax + b \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \qquad (a \neq 0)$$

sind **invers zueinander**.

- Die Graphen sind Geraden.
- Sie sind **symmetrisch zur Winkelhalbierenden $y = x$**.
- Die Steigungen sind a und $1/a$.



Steigungen sind **4** und **1/4**.

Wenn f und g invers sind, dann gilt:

$$g(f(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in I$$

Wenn f und g differenzierbar, dann folgt durch **implizites Differenzieren** nach x:

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

Falls $f'(x) \neq 0$, folgt:

$$\boxed{g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}}$$

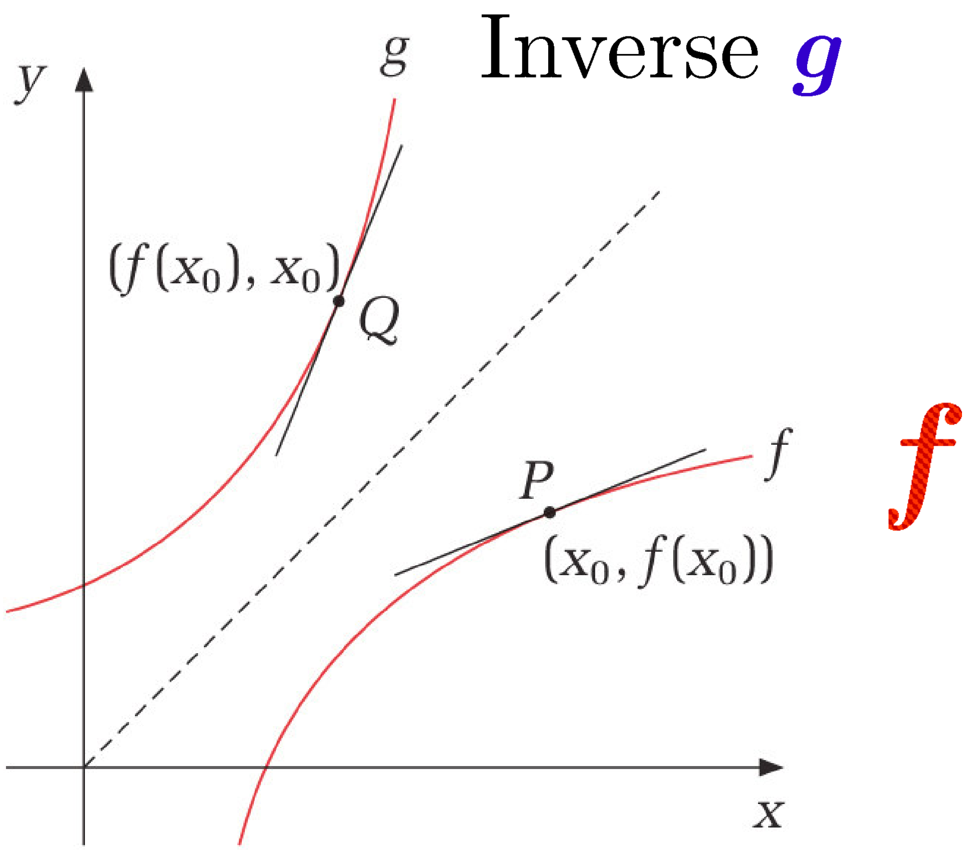
- f' und g' haben dasselbe Vorzeichen.
- Wenn f streng monoton wachsend, dann auch g und umgekehrt.
- Wenn f streng monoton fallend, dann auch g und umgekehrt.

Wenn f **stetig** und **streng monoton wachsend** (oder **streng monoton fallend**) auf einem Intervall I ist, dann hat f eine **inverse Funktion** g, die auf dem Intervall $f(I)$ **stetig** und **streng monoton wachsend (fallend)** ist.

Wenn x_0 ein **innerer Punkt** des Intervalls I und $f'(x_0) \neq 0$ ist, dann ist g **differenzierbar** in $y_0 = f(x_0)$ und es gilt:

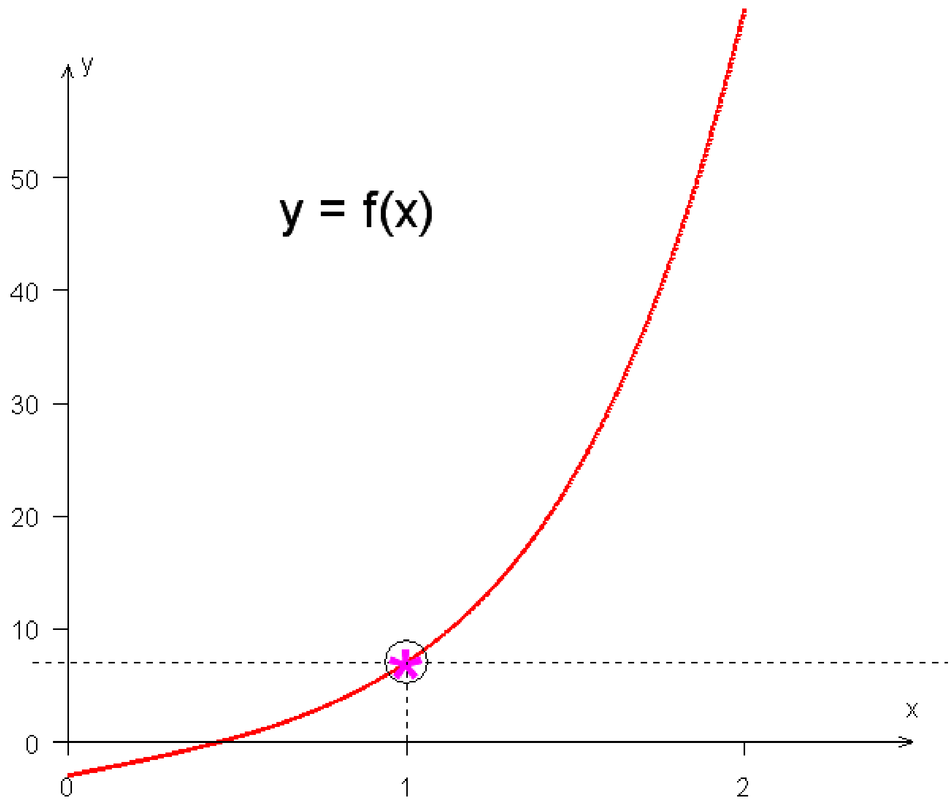
$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0 = f(x_0))}$$

Anmerkung 1: Um die Ableitung von g in y_0 zu finden, ist zunächst x_0 so zu bestimmen, dass $y_0 = f(x_0)$.



- Steigung der Tangente in $\boldsymbol{P}$ sei $\boldsymbol{a = f'(x_0)}$.
- In $\boldsymbol{Q}$ ist die $\boldsymbol{x}$-Koordinate: $\boldsymbol{f(x_0)}$.
- Steigung der Tangente in $\boldsymbol{Q}$ ist: $\boldsymbol{g'(f(x_0)) = 1/a}$.

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 6x - 3$$



1.) Zeigen Sie : f hat Inverse g

2.) Bestimmen Sie $g'(7)$

Hinweis: $f(1) = 7$

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 6x - 3$$

1.) $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 6 > 0$ für alle x, d.h. f ist **streng monoton wachsend** und **umkehrbar eindeutig**, hat daher eine **Inverse** g.

2.) $f(1) = 7 \quad \Longrightarrow \quad g(7) = 1$ d.h. $x_0 = 1 \quad y_0 = 7$

$f'(1) = 20 \quad \Longrightarrow \quad g'(7) = 1/f'(1) = 1/20$

Beachten Sie: Wir können $g'(7)$ exakt bestimmen, obwohl es unmöglich ist, eine algebraische Formel für g anzugeben.

f und g seien invers und zweimal differenzierbar.

Bestimmen Sie die zweite Ableitung $g''(f(x))$.

Lösung:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$$

Differentiation nach x ergibt:

$$g''(f(x))f'(x) = (-1)(f'(x))^{-2}f''(x) = -f''(x)/(f'(x))^2$$

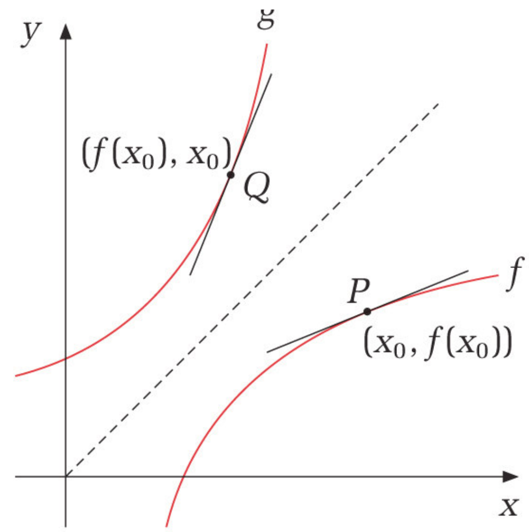
Für $f'(x) \neq 0$ folgt:

$$\boxed{g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}}$$

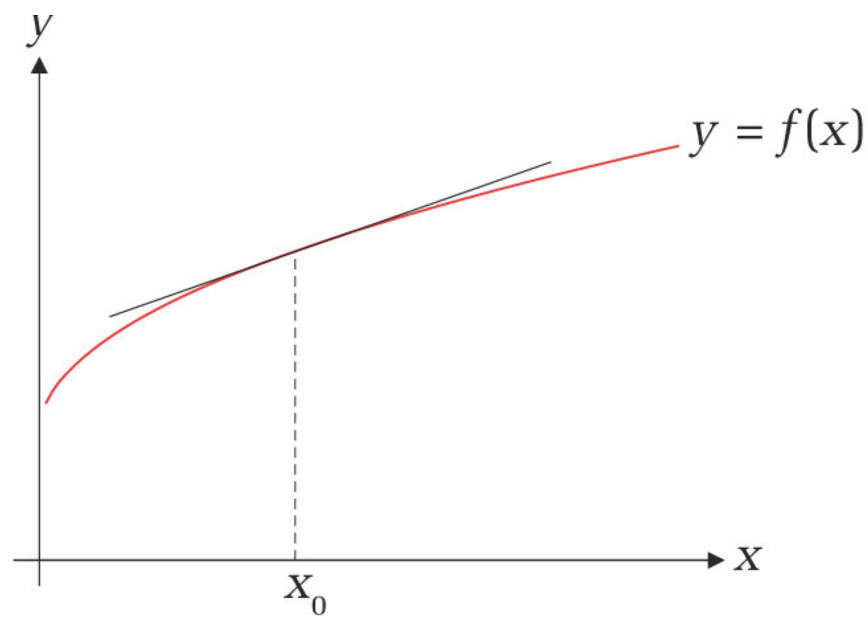
Beispiel 3: Zweite Ableitung der inversen Funktion

$$g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

- Wenn $f'(x) > 0$, haben $f''(x)$ und $g''(f(x))$ **entgegengesetztes** Vorzeichen.
- Wenn $f'(x) < 0$, haben $f''(x)$ und $g''(f(x))$ **gleiches** Vorzeichen.
- Wenn f **monoton wachsend und konkav**, dann ist die **Inverse monoton wachsend und konvex**.



- Wir können **komplizierte Funktionen vermeiden**, wenn wir sie durch **einfachere APPROXIMIEREN** (annähern).
- **Lineare Funktionen sind einfach.**
- Die **Tangente** ist eine **lineare Funktion**.
- Wir könnten $\boldsymbol{f}$ **in der Nähe** von $x = x_0$ **durch die Tangente in** $x = x_0$ **approximieren**.



Sei $f(x)$ differenzierbar in $x = x_0$.

Tangente an den Graphen in $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (6.2.2)$$

Die **lineare Approximation** von f um $x = x_0$ ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \text{ in der } \textbf{Nähe} \text{ von } x_0)$$

Wenn $p(x)$ die lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ von x ist, dann haben f und p **denselben Funktionswert** und **dieselbe Ableitung** in $x = x_0$.

Beispiel 1: Bestimmen Sie die lineare Approximation

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ in der **Nähe** von $x = 1$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \implies f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$f(1) = 1 \qquad f'(1) = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{x} \approx f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) \quad (x \text{ nahe } 1)$$

z.B. $\sqrt[3]{1.03} \approx 1 + \frac{1}{3}(1.03 - 1) = 1 + \frac{1}{3}0.03 = 1.01$

Der korrekte Wert auf vier Dezimalstellen ist: **1.0099**

Beispiel 3: Bestimmen Sie eine Approximation für

$$(1.001)^{50}$$

Lösung:

Wir setzen: $f(x) = x^{50} \quad \Longrightarrow \quad f(1) = 1$

$$f'(x) = 50x^{49} \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = 50 \cdot 1^{49} = 50$$

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) \qquad (x \text{ nahe bei } 1)$$

$x = 1.001$ und $x_0 = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\boxed{(1.001)^{50} \approx 1 + 50 \cdot 0.001 = 1.05}$$

Taschenrechner: $(1.001)^{50} = 1.0512$

Die Funktion $f(x)$ sei differenzierbar.

dx sei eine beliebige Änderung in der Variablen x.

Dann ist das **DIFFERENTIAL** von $y = f(x)$ definiert durch:

$$\boxed{dy = f'(x)dx \qquad (2)}$$

- $dy = df$ ist proportional zu dx mit Proportionalitätsfaktor $f'(x)$.
- Wenn x sich um dx ändert, ist die Änderung in $y = f(x)$ gleich:

$$\boxed{\Delta y = f(x + dx) - f(x) \qquad (3)}$$

Lineare Approximation von f um $x = x_0$:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \text{ in der } \textbf{Nähe} \text{ von } x_0)$$

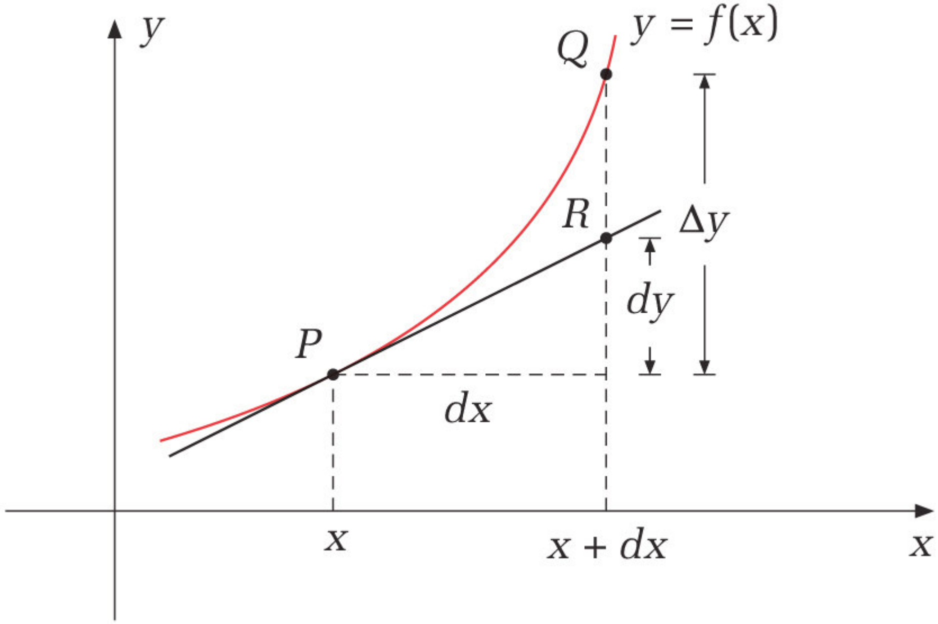
Ersetze x durch $x + dx$ und x_0 durch x, dann ist:

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx \iff \underbrace{f(x + dx) - f(x)}_{\Delta y} \approx \underbrace{f'(x)dx}_{dy}$$

d.h.

$$\boxed{\Delta y \approx dy = f'(x)dx}$$

Geometrische Interpretation des Differentials



- Das **Differential** ist **nicht** der **tatsächliche Zuwachs** in $\boldsymbol{y}$, wenn $\boldsymbol{x}$ sich von $\boldsymbol{x}$ auf $\boldsymbol{x + dx}$ ändert.

- Das **Differential** ist der **Zuwachs** in $\boldsymbol{y}$, der eintreten würde, wenn $\boldsymbol{y}$ sich mit der **konstanten Rate** $\boldsymbol{f'(x)}$ ändern würde, wenn $\boldsymbol{x}$ sich von $\boldsymbol{x}$ auf $\boldsymbol{x + dx}$ ändert.

- Die Approximation $\boldsymbol{\Delta y \approx dy}$ ist umso besser, je kleiner $\boldsymbol{dx}$ ist.

$(\boldsymbol{d/dx})(\cdot)$ bedeutet:

Differenzieren Sie den Ausdruck in der Klammer nach $\boldsymbol{x}$.

z.B. $\quad (\boldsymbol{d/dx})(\boldsymbol{x^3}) = \boldsymbol{3x^2}$

Analog ist $\boldsymbol{d}(\cdot)$ das **Differential** des Ausdrucks in der Klammer.

z.B. $\quad \boldsymbol{d(x^3) = 3x^2 dx}$

Beispiel 4: Berechnen Sie die folgenden Differentiale:

(a) $d(Ax^a + B)$

Lösung: Setzen Sie:

$$f(x) = Ax^a + B \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = Aax^{a-1}$$

$$\Longrightarrow \quad d(Ax^a + B) = d(f(x)) = f'(x)dx = Aax^{a-1}dx$$

(b) $d(f(K)) = f'(K)dK$

- $d(af + bg) = a\,df + b\,dg$ (a und b Konstante)
- $d(fg) = g\,df + f\,dg$
- $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$ ($g \neq 0$)

Beachten Sie die Analogien zur Summen-, Produkt- und Quotientenregel!

$$y = f(x) \qquad x = g(t) \quad \Longrightarrow \quad y = h(t) = f(g(t))$$

$$y = h(t) \quad \Longrightarrow \quad dy = h'(t)\,dt$$

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) \quad \Longrightarrow \quad dy = f'(g(t))g'(t)dt$$

$$x = g(t) \Longrightarrow dx = g'(t)\,dt \Longrightarrow dy = \underbrace{f'(g(t))}_{f'(x)}\,\underbrace{g'(t)dt}_{dx}$$

d.h. $\boxed{dy = f'(x)dx = dy}$

Wenn $y = f(x)$, dann ist das Differential von y gleich $dy = f'(x)\,dx$, egal ob x von einer anderen Variablen abhängt oder nicht.

Bisher: **Approximation** durch **LINEARE** Funktionen

Beispiel 7.4.1: $$\sqrt[3]{x} \approx 1 + \frac{1}{3}(x-1)$$

Die Funktionen $y = \sqrt[3]{x}$ und $y = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$ haben in $x = 1$ **denselben Funktionswert 1** und **dieselbe Ableitung 1/3**.

Lineare Approximationen können ungenau sein, daher verwendet man **QUADRATISCHE Approximationen** oder **Approximation durch Polynome höherer Ordnung**:

$$\boxed{f(x) \approx p(x) = A + B(x-x_0) + C(x-x_0)^2}$$

Voraussetzung: f ist zweimal differenzierbar

$$f(x) \approx p(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$$

- Es sind **drei Koeffizienten** A, B und C zu bestimmen.
- Wir können **drei Bedingungen** an das Polynom stellen:
  An der Stelle $x = x_0$ sollen $f(x)$ und $p(x)$
  - **denselben Funktionswert**,
  - **dieselbe Ableitung** und
  - **dieselbe zweite Ableitung** haben.

$$f(x_0) = p(x_0) \qquad f'(x_0) = p'(x_0) \qquad f''(x_0) = p''(x_0)$$

$$p'(x) = B + 2C(x - x_0) \qquad p''(x) = 2C$$

Setze:

1.) $x = x_0$ in $p(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 \Rightarrow A = p(x_0)$

2.) $x = x_0$ in $p'(x) = B + 2C(x - x_0) \Rightarrow B = p'(x_0)$

3.) $x = x_0$ in $p''(x) = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}p''(x_0)$

Die quadratische Approximation von $f(x)$ um $x = x_0$ ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

für x in der **Nähe** von x_0.

Lineare Approximation:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Quadratische Approximation:

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Lineare Approximation}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}_{\text{Neuer Term}}$$

Spezialfall $x_0 = 0$:

$$\boxed{f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2}$$

Beispiel 1: Bestimmen Sie die quadratische Approximation für

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{um} \quad x = 1$$

Lösung:

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3}$$

$$f(1) = 1 \qquad f'(1) = \frac{1}{3} \qquad f''(1) = -\frac{2}{9}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{x} \approx 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 \quad (x \text{ in der } \textbf{Nähe} \text{ von } 1)}$$

z.B. ist folgende Approximation korrekt auf vier Dezimalstellen:

$$\sqrt[3]{1.03} \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot 0.03 - \frac{1}{9}(0.03)^2 = 1 + 0.01 - 0.0001 = 1.0099$$

Noch bessere (als lineare und quadratische) **Approximation durch ein Polynom n-ten Grades der Gestalt $p(x) =$**

$$A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \ldots + A_n(x - x_0)^n$$

Es gibt jetzt $\boldsymbol{n+1}$ Koeffizienten und $\boldsymbol{n+1}$ Bedingungen:

$$f(x_0) = p(x_0) \qquad f'(x_0) = p'(x_0) \qquad \ldots \qquad f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$$

Dies führt zur **Approximation** von $f(x)$ um $x = x_0$:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

Das **Polynom** auf der rechten Seite heißt das **TAYLOR-Polynom n-ter Ordnung** oder die **TAYLOR-Approximation** für f um $x = x_0$.

Beispiel 3: Taylor-Polynom 3. Grades für

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \quad \text{um} \quad x = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}
\end{aligned}$$

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 1/2 \qquad f''(0) = -1/4 \qquad f'''(0) = 3/8$$

$$\boxed{\begin{aligned}
f(x) &\approx 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3 \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3
\end{aligned}}$$

$$f(x) = e^x$$

Lösung:

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Speziell für $x_0 = 0$:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Für die e-Funktion folgt:

$$\boxed{e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}$$

Approximation von $f(x)$ um $x = 0$ durch **Taylor-Polynom n-ter Ordnung**:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Nutzen solcher Approximation ist begrenzt, wenn nichts über den **Fehler** bekannt ist!

Differenz zwischen $f(x)$ und Taylor-Polynom heißt **RESTGLIED**.

Das Restglied ist abhängig von x und n und wird bezeichnet mit

$$R_{n+1}(x)$$

$$\boxed{f(x) \overset{!}{=} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)}$$

Die Funktion f sei in einem Intervall, das 0 und x enthält, $n+1$-mal differenzierbar. Dann gilt für das Restglied:

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\, x^{n+1}}$$

für eine Zahl c zwischen 0 und x.

Taylor-Formel:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\, x^{n+1}}$$

$$\boxed{R_2(x) = \frac{1}{2} f''(c) x^2}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{1}{2} f''(c) x^2 \qquad c \text{ zwischen } 0 \text{ und } x$$

$R_2(x) = \frac{1}{2} f''(c) x^2$ ist der Fehler, den wir machen, wenn wir $f(x)$ durch die Taylor-Approximation $f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x$ ersetzen.

- Wie benutzen wir das Restglied?
- Was sagt uns das Restglied?

Wenn für alle $\boldsymbol{x}$ in einem Intervall $\boldsymbol{I}$: $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, so folgt:

$$\boxed{|R_{n+1}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}}$$

- Das Restglied ermöglicht eine Abschätzung der oberen Grenze des resultierenden Fehlers, wenn wir f durch das Taylor-Polynom ersetzen.
- Das Restglied wird klein, wenn n groß und x nahe bei $\mathbf{0}$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c \qquad (0 < c < x)$$

Abschätzung des Fehlers für $n = 3$ und $x = 0.1$:

$$e^{0.1} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} + \frac{(0.1)^4}{24}e^c \qquad (0 < c < 0.1)$$

Mit dem Taschenrechner sieht man, dass $\quad e^c < e^{0.1} < 1.2$

$$\left|R_4\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \frac{(0.1)^4}{24}e^c < \frac{1}{240\,000}1.2 = 0.000\,005 = 5 \cdot 10^{-6}$$

Restglied bei Entwicklung um $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\overset{!}{c})(x - x_0)^{n+1}}$$

c zwischen x und x_0

Motivation

- **Wie reagiert Nachfrage** nach einem Gut **auf Preisänderungen**?
  - Um **wie viele Einheiten ändert** sich die **nachgefragte Menge**, wenn der **Preis um 1 Euro steigt**?
  - **Antwort: eine Zahl, eine Anzahl von Einheiten**
  - **Nachteile, Unzulänglichkeiten** bei dieser Antwort
    - **Preisänderung um 1 Euro** bei einem Pfund **Kaffee beträchtlich**, bei einem **Auto unerheblich**!!
  - **Grund: Wahl der Einheiten**
- **Ausweg: Betrachten Sie relative Änderungen**:
  - Um **welchen Prozentsatz ändert** sich die **Nachfrage, wenn der Preis sich um 1% ändert**?
  - Antwort **unabhängig von den gewählten Einheiten** (von Preis und Menge) **PREISELASTIZITÄT der Nachfrage**

Um **welchen Prozentsatz** ändert sich die **Nachfrage**, **wenn der Preis sich um 1% ändert**?

Preiselastizität für Butter (1960) geschätzt: -1

Interpretation: Eine **Preiserhöhung** um **1%** bewirkt eine **Verringerung der Nachfrage um 1%**.

Preiselastizität für Kartoffeln: -0.2

Interpretation: Eine **Preiserhöhung** um **1%** bewirkt eine **Verringerung der Nachfrage um 0.2%**.

Warum soviel geringer als für Butter?

Nachfrage sei Funktion des **Preises**: $x = D(P)$

Preisänderung von P auf $P + \Delta P$

Änderung der nachgefragten Menge: $\Delta x = D(P + \Delta P) - D(P)$

Relative (proportionale) **Änderung**: $\frac{\Delta x}{x} = \frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{D(P)}$

Verhältnis zwischen der **relativen Änderung** der nachgefragten **Menge** und der **relativen Preisänderung**:

$$\frac{\Delta x}{x} \Big/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x} \frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)} \frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{\Delta P} \qquad (*)$$

Verhältnis zwischen der **relativen Änderung** der nachgefragten **Menge** und der **relativen Preisänderung**:

$$\frac{\Delta x}{x} \Bigg/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x}\frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)}\frac{D(P+\Delta P)-D(P)}{\Delta P} \qquad (*)$$

Sei $\Delta P = P/100$, d.h. der **Preis** steigt um **1%**.

Dann ergibt sich in $(*)$: $(\Delta x/x)\cdot 100$

Dies ist die **prozentuale** Änderung der nachgefragten Menge.

Das Verhältnis in (*) wird auch **durchschnittliche Elastizität** von x im Intervall $[P, P+\Delta P]$ genannt.

$$\frac{\Delta x}{x} \Big/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x} \frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)} \frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{\Delta P} \qquad (*)$$

Das Verhältnis in (*) wird auch **durchschnittliche Elastizität** von x im Intervall $[P, P + \Delta P]$ genannt.

Die durchschnittliche Elastizität ist abhängig von ΔP und P, jedoch dimensionslos.

Wünschenswert wäre: **Elastizität** von D an der Stelle P ist **unabhängig** von ΔP.

Dies ist möglich, wenn D eine **differenzierbare** Funktion von P ist.

Wenn D eine **differenzierbare** Funktion von P ist, bilden wir für $\Delta P \to 0$ den Grenzwert von

$$\frac{\Delta x}{x} \Big/ \frac{\Delta P}{P} = \frac{P}{x} \frac{\Delta x}{\Delta P} = \frac{P}{D(P)} \underbrace{\frac{D(P + \Delta P) - D(P)}{\Delta P}}_{\to D'(P)} \qquad (*)$$

Elastiziät von $D(P)$ bezüglich P ist:

$$\boxed{\frac{P}{D(P)} \frac{dD(P)}{dP}}$$

Gewöhnlich erhalten wir eine gute Approximation, wenn wir $\Delta P/P = 1/100 = 1\%$ setzen und $P\Delta x/(x\Delta P)$ berechnen.

Andere wichtige Elastizitäten, die Ökonomen betrachten:

- Preiselastizität der Nachfrage
- Einkommenselastizität der Nachfrage
- Elastizität des Angebots
- Substitutionselastizität
- ...

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, definieren wir die **Elastizität** von f bezüglich x durch

$$\boxed{\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)}$$

Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x) = Ax^b$

A und b Konstante mit $A \neq 0$

Lösung:

$$f'(x) = Abx^{b-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{El}_x Ax^b = \frac{x}{Ax^b} Abx^{b-1} = b$$

$$\boxed{f(x) = Ax^b \quad \Rightarrow \quad \mathrm{El}_x f(x) = b}$$

Elastizität der **Potenzfunktion** Ax^b ist der **Exponent** b.

Dies ist ein Beispiel einer Funktion, deren Elastizität konstant ist.

- Wenn $|\mathrm{El}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| > \mathbf{1}$, dann ist $\boldsymbol{f}$ **elastisch** an der Stelle $\boldsymbol{x}$.
- Wenn $|\mathrm{El}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \mathbf{1}$, dann ist $\boldsymbol{f}$ **1- elastisch** (ausgeglichen elastisch) an der Stelle $\boldsymbol{x}$.
- Wenn $|\mathrm{El}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < \mathbf{1}$, dann ist $\boldsymbol{f}$ **unelastisch** an der Stelle $\boldsymbol{x}$.
- Wenn $|\mathrm{El}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \mathbf{0}$, dann ist $\boldsymbol{f}$ **vollkommen unelastisch** an der Stelle $\boldsymbol{x}$.

Elastizitäten als logarithmische Ableitungen

Sei $\boldsymbol{y = Ax^b}$ $\quad (\boldsymbol{x, y, A}$ positiv) $\quad (2)$

Nach Beispiel 1 gilt: $\boldsymbol{El_x y = b}$

Wir bilden auf beiden Seiten von (2) den natürlichen Logarithmus:

$$\boldsymbol{\ln y = \ln A + b \ln x} \qquad (3)$$

$\boldsymbol{\ln y}$ ist eine **lineare** Funktion von $\boldsymbol{\ln x}$.

Zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ besteht eine **LOGLINEARE** Beziehung.

$$\boldsymbol{d \ln y / d \ln x = b}$$

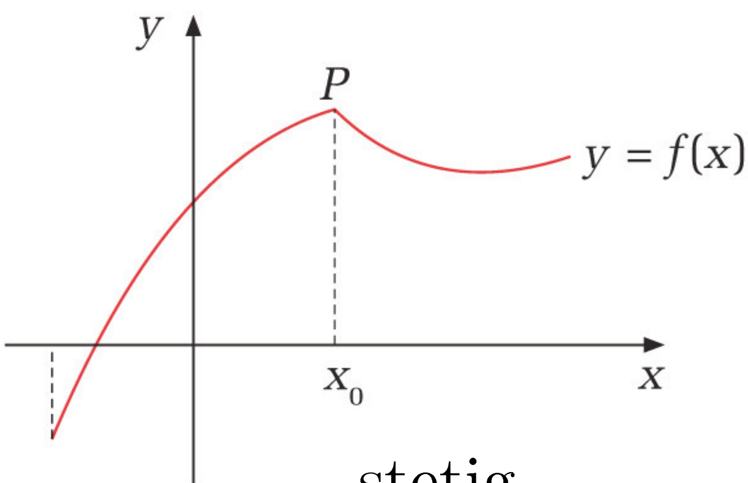
Die **Elastizität** ist gleich der (doppelten) **logarithmischen Ableitung** $\boldsymbol{d \ln y / d \ln x}$.

Wenn x und y beide **positive** Variablen sind und y eine differenzierbare Funktion von x ist, dann gilt:

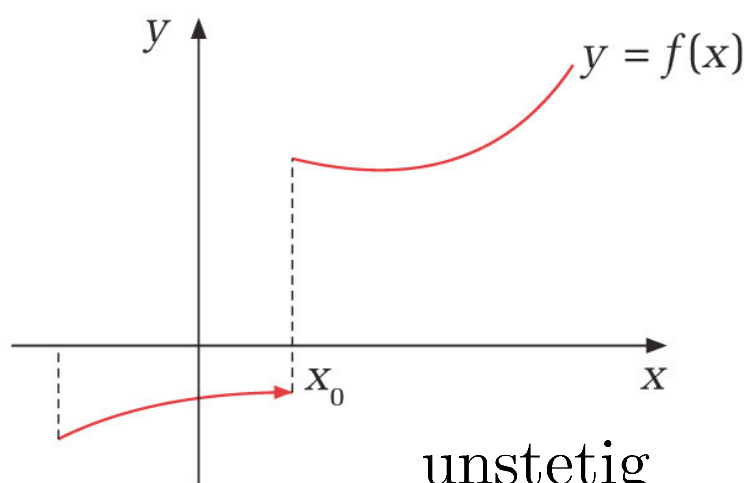
$$\boxed{\mathrm{El}_x y = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{d \ln x}}$$

Stetigkeit, geometrisch gesehen

- Eine Funktion ist **STETIG**, wenn **kleine Änderungen** der unabhängigen Variable **kleine Änderungen** der abhängigen Variablen bewirken.
- Eine Funktion ist **stetig**, wenn der **Graph zusammenhängend** ist, d.h. **keine Sprünge** macht.
- Eine Funktion ist **stetig**, wenn man den Graphen (mit dem Bleistift) **ohne abzusetzen** (in einem Strich) zeichnen kann.
- Wenn der Graph einen oder mehrere **Sprünge** hat, sagen wir, dass die Funktion **UNSTETIG** ist.



stetig



unstetig

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$, wenn

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

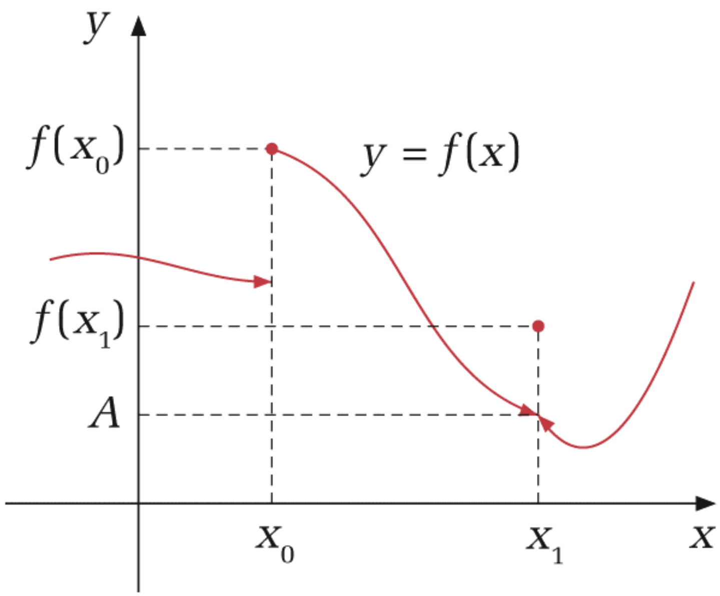
Damit f stetig ist in $x = x_0$, müssen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sein:

(i) Die Funktion f muss an der Stelle $x = x_0$ definiert sein.

(ii) Der **Grenzwert** von $f(x)$, wenn x gegen x_0, muss **existieren**.

(iii) Dieser **Grenzwert** muss gleich $f(x_0)$ sein.

Wenn diese Bedingungen **nicht** erfüllt sind, heißt f **UNSTETIG** an der Stelle $x = x_0$.



$\boldsymbol{f}$ hat zwei Unstetigkeitsstellen:

1. $\boldsymbol{x = x_0}$ ist eine **irreparable Unstetigkeitsstelle**, denn der **Grenzwert** für $\boldsymbol{x \longrightarrow x_0}$ **existiert nicht**.

2. $\boldsymbol{x = x_1}$ ist eine **reparable Unstetigkeitsstelle** für $\boldsymbol{f}$, denn der **Grenzwert** für $\boldsymbol{x \longrightarrow x_1}$ **existiert**. Er ist jedoch $\boldsymbol{\neq f(x_1)}$. **Definiert man die Funktion** an der Stelle $\boldsymbol{x_1}$ **um**

$$\boldsymbol{f(x_1) = A},$$

so ist sie **stetig**.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Kap. 6.5) folgen wichtige Resultate für stetige Funktionen.

Hier noch einmal die Rechenregeln für Grenzwerte aus Kap. 6.5:

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, dann gilt:

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

(c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (falls $B \neq 0$)

(d) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^r = A^r$ (falls A^r definiert ist)

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, dann gilt:

(a) Der **Grenzwert einer Summe (Differenz)** ist die **Summe (Differenz) der Grenzwerte**.

(b) Der **Grenzwert eines Produkts** ist das **Produkt der Grenzwerte**.

(c) Der **Grenzwert eines Quotienten** ist der **Quotient der Grenzwerte**, falls der Nenner nicht Null ist.

(d) Der **Grenzwert einer Potenz** ist die **Potenz des Grenzwerts der Basis**, falls diese Potenz definiert ist.

$$\lim_{x \to x_0} c = c \qquad\qquad \lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \text{für alle } x_0$$

Wegen $\lim_{x \to x_0} c = c$ und $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ für alle x_0, sind

die Funktionen $f(x) = c$ und $f(x) = x$ überall stetig.

Wenn f und g stetig sind in $x = x_0$, dann

(a) sind $f + g$ und $f - g$ stetig in $x = x_0$

(b) sind fg und f/g (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in $x = x_0$

(c) ist $[f(x)]^r$ stetig in x_0, wenn $(f(x_0))^r$ definiert ist.

(d) Wenn f im Intervall I eine Inverse hat, so ist f^{-1} stetig auf $f(I)$.

- **Polynome** sind überall **stetig**.
- **Rationale Funktionen** $R(x) = P(x)/Q(x)$ sind **stetig** in allen x, in denen $Q(x) \neq 0$.
- **Verkettungen** von stetigen Funktionen sind **stetig**:

Wenn g stetig ist in $x = x_0$ und f stetig ist an der Stelle $g(x_0)$, dann ist $f(g(x))$ stetig an der Stelle $x = x_0$.

Zusammenfassung

Jede Funktion, die durch eine oder mehrere der Operationen:

- **Addition**
- **Subtraktion**
- **Multiplikation**
- **Division (außer durch 0)**
- **Verkettung**

aus **stetigen Funktionen** konstruiert wird, ist **stetig** in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}$$

Lösung:

Dies ist eine **rationale** Funktion, die **stetig** ist, **wo sie definiert** ist, d.h. dort, wo der Nenner $\neq 0$ ist, d.h. f ist **stetig außer** in $x = 1$ und $x = -2$.

Die Funktion f sei für alle x in der Nähe von x_0 definiert.

Die Funktion $f(x)$ hat A als **Grenzwert**, wenn x gegen x_0 strebt, wenn der Wert $f(x)$ beliebig nahe zu A gewählt werden kann, indem man x hinreichend nahe (aber nicht gleich) x_0 wählt.

In diesem Fall sagen wir, dass der **Grenzwert existiert**.

Es gibt Fälle, in denen der **Grenzwert nicht existiert**.

Beispiel 1:

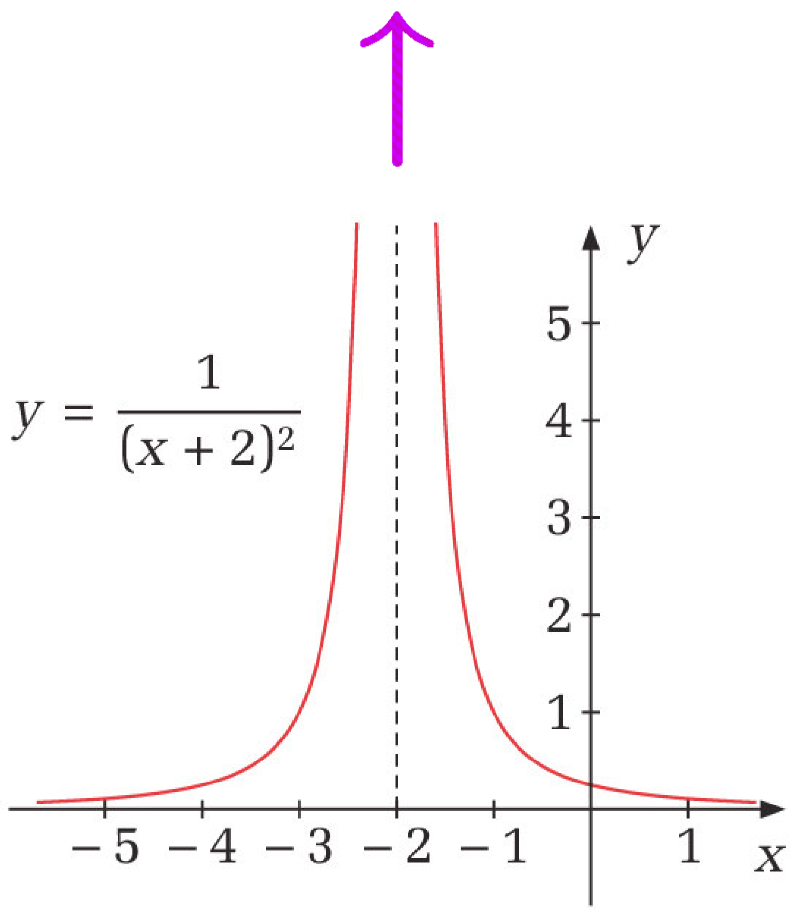
Untersuchen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners:

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$$

x	-1.8	-1.9	-1.99	-1.999	-2.0	-2.001	-2.01	-2.1	-2.2
$\frac{1}{(x+2)^2}$	25	100	10000	1000000	*	1000000	10000	100	25

Je näher x an -2, desto größer wird $1/(x+2)^2$.

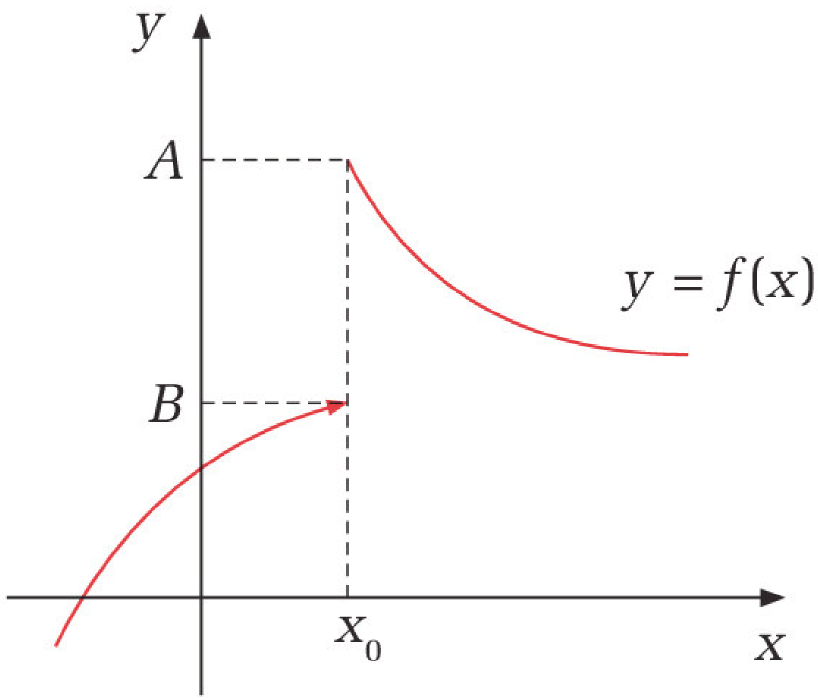
$$\frac{1}{(x+2)^2} \to \infty \quad \text{wenn} \quad x \to -2$$



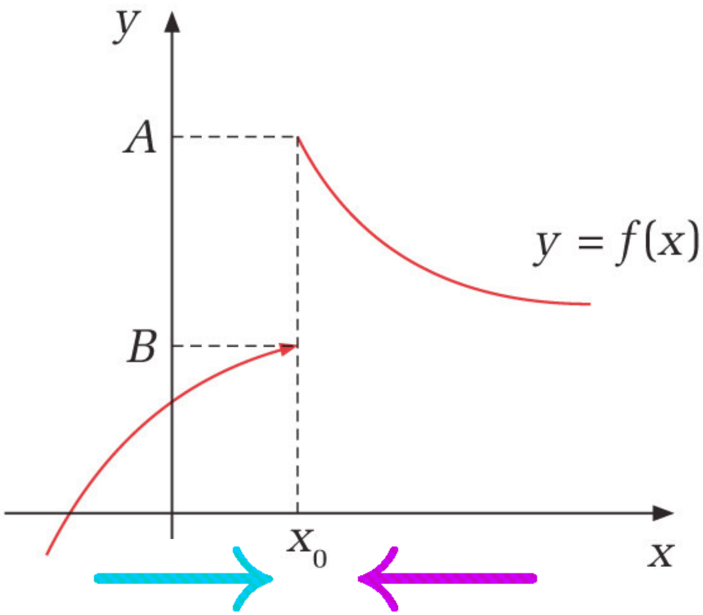
$$y = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Die Gerade $x = -2$ ist eine **vertikale Asymptote** für den Graphen von f.

Abbildung 2: Einseitige Grenzwerte



- Funktion hat **keinen Grenzwert**, wenn x gegen x_0.
- Sie hat jedoch den **Grenzwert** B, wenn x **von links** gegen x_0.
- Sie hat den **Grenzwert** A, wenn x **von rechts** gegen x_0.



Der **Grenzwert** von $f(x)$, wenn x von **links** gegen x_0, ist B.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = B \quad \text{oder} \quad f(x) \to B \ \text{, wenn} \ x \to x_0^-$$

Der **Grenzwert** von $f(x)$, wenn x von **rechts** gegen x_0, ist A.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{oder} \quad f(x) \to A \ \text{, wenn} \ x \to x_0^+$$

Wir sprechen von

LINKSSEITIGEM und **RECHTSSEITIGEM** **Grenzwert**

Auch: **Grenzwert** von **UNTEN** bzw. **OBEN**

Eine **notwendige und hinreichende Bedingung**, dass der **gewöhnliche Grenzwert existiert**, ist, dass die **beiden einseitigen Grenzwerte existieren** und **übereinstimmen**.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \left[\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ und } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \right]}$$

- $f(x) \to \infty$ wenn $x \to x_0^-$

  $f(x)$ wird immer **größer**, wenn x von links gegen x_0

- $f(x) \to -\infty$ wenn $x \to x_0^-$

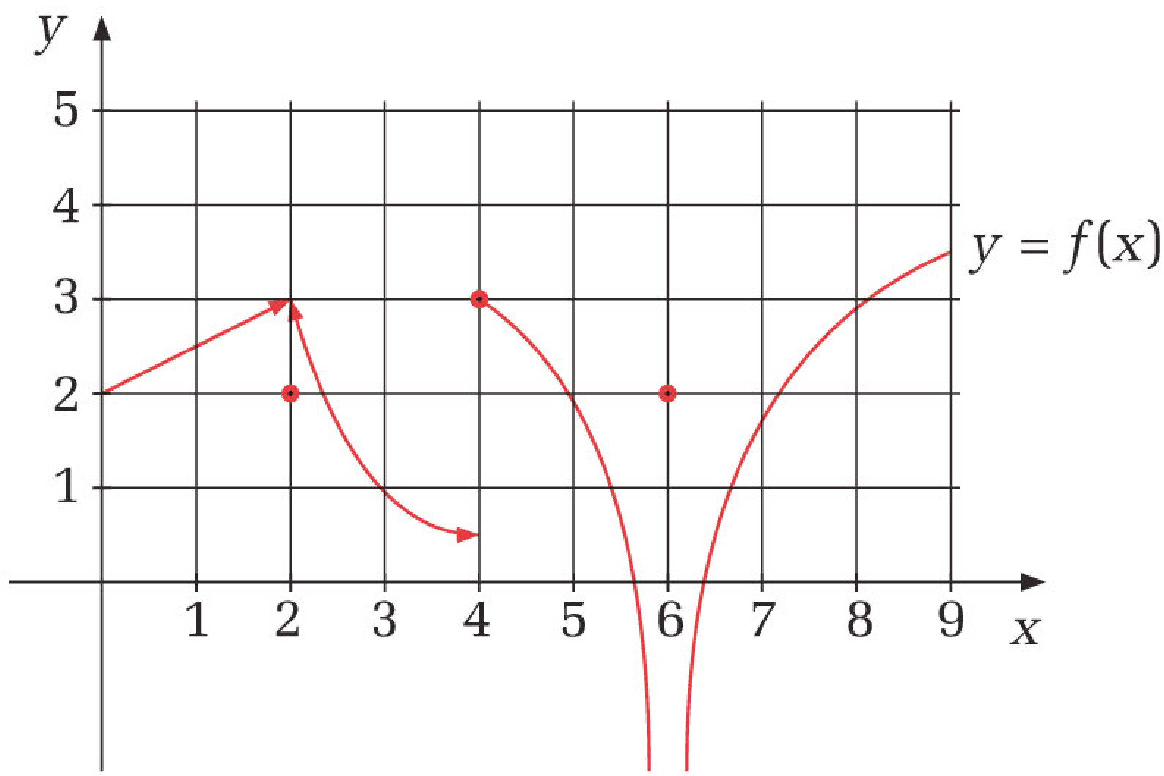
  $f(x)$ wird immer **kleiner**, wenn x von links gegen x_0

- $f(x) \to \infty$ wenn $x \to x_0^+$

  $f(x)$ wird immer **größer**, wenn x von rechts gegen x_0

- $f(x) \to -\infty$ wenn $x \to x_0^+$

  $f(x)$ wird immer **kleiner**, wenn x von rechts gegen x_0



$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 1/2$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 3 \qquad \text{„}\lim_{x\to 6} f(x) = -\infty\text{"}$$

Beispiel 3: Begründen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}-\boldsymbol{x}}} \to \infty, \quad \text{wenn} \quad \boldsymbol{x} \to \mathbf{2}^-$$

Lösung:

Wenn $\boldsymbol{x}$ wenig kleiner als $\mathbf{2}$, so ist $\mathbf{2}-\boldsymbol{x}$ klein und positiv.

Daher ist $\sqrt{\mathbf{2}-\boldsymbol{x}}$ nahe $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}/\sqrt{\mathbf{2}-\boldsymbol{x}}$ eine große positive Zahl.

$$\frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}} \to -\infty, \quad \text{wenn} \quad \boldsymbol{x} \to \mathbf{2}^+$$

Lösung:

Wenn $\boldsymbol{x}$ wenig größer als $\mathbf{2}$, so ist $\boldsymbol{x}-\mathbf{2}$ klein und positiv.

Daher ist $\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}$ nahe $\mathbf{0}$ und $-\mathbf{1}/\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}$ eine große negative Zahl.

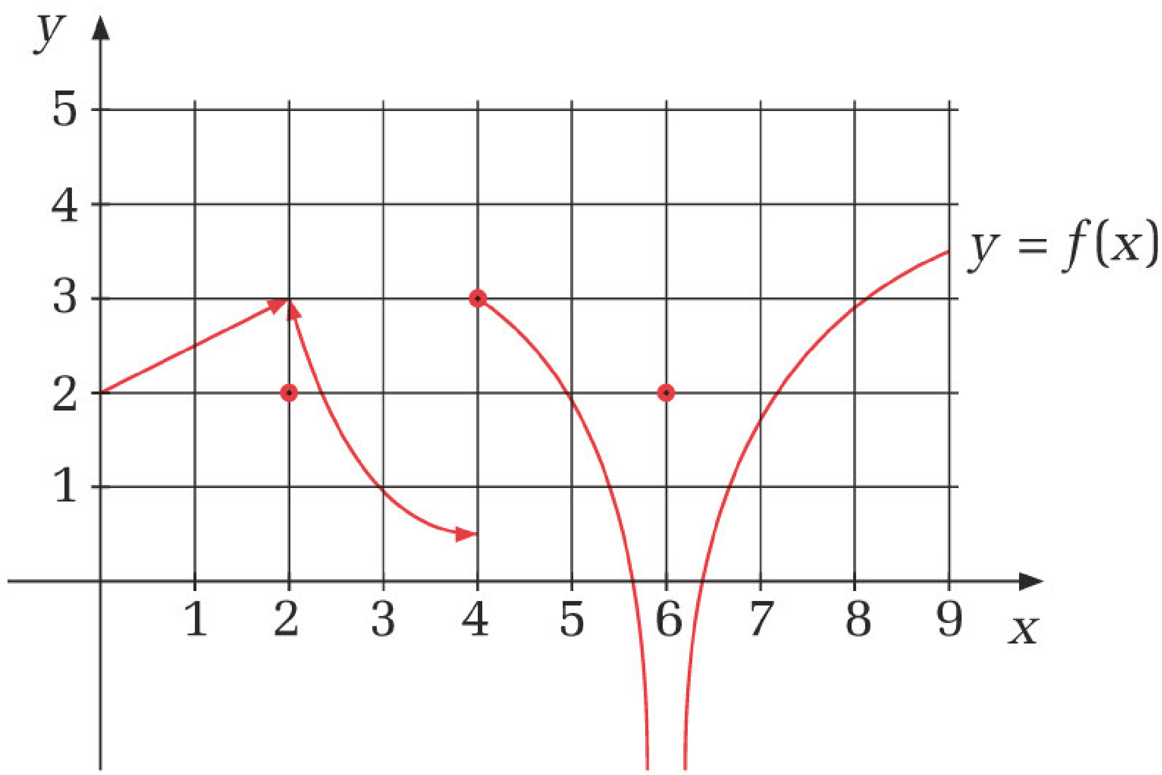
Die Funktion f sei definiert auf dem halboffenen Intervall $(c, x_0]$.

Wenn $f(x)$ gegen $f(x_0)$, wenn x gegen x_0^-, dann heißt f **linksstetig** in x_0.

Die Funktion f sei definiert auf dem halboffenen Intervall $[x_0, d)$.

Wenn $f(x)$ gegen $f(x_0)$, wenn x gegen x_0^+, dann heißt f **rechtsstetig** in x_0.

Eine Funktion f ist **stetig** in x_0, wenn sie sowohl **linksstetig** als auch **rechtsstetig** in x_0 ist.



$\boldsymbol{f}$ ist **rechtsstetig** in $\boldsymbol{x = 4}$.

In $\boldsymbol{x = 2}$ existieren der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert.

Beide sind jedoch $\neq \boldsymbol{f(2)}$.

Daher ist $\boldsymbol{f}$ weder links- noch rechtsstetig in $\boldsymbol{x = 2}$

Sei $\boldsymbol{f}$ definiert auf $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

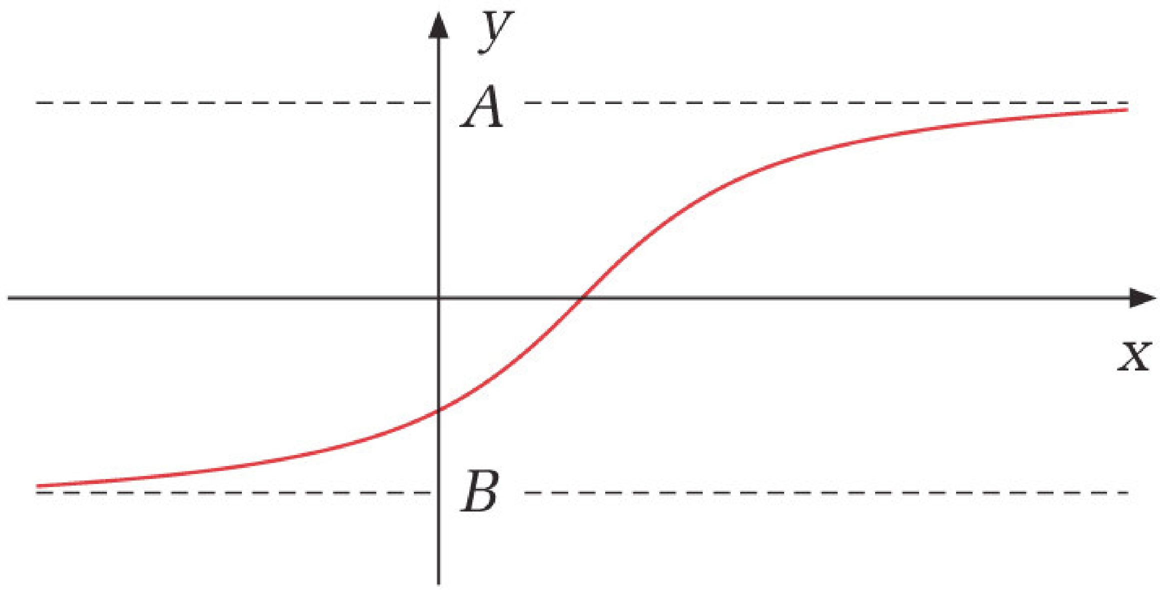
Dann ist $\boldsymbol{f}$ **stetig** auf $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, wenn $\boldsymbol{f}$ **stetig** ist in jedem Punkt von $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ und zusätzlich **rechtsstetig** in $\boldsymbol{a}$ und **linksstetig** in $\boldsymbol{b}$.

Die Funktion $f(x)$ hat A als **Grenzwert**, wenn x gegen ∞, wenn $f(x)$ **beliebig nah** an A gewählt werden kann, indem man für x eine **genügend große positive Zahl** wählt.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \text{oder} \quad f(x) \to A\,, \quad \text{wenn} \quad x \to \infty$$

Die Funktion $f(x)$ hat B als **Grenzwert**, wenn x gegen $-\infty$, wenn $f(x)$ **beliebig nah** an B gewählt werden kann, indem man für x eine **genügend große negative Zahl** wählt.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B \quad \text{oder} \quad f(x) \to B\,, \quad \text{wenn} \quad x \to -\infty$$



Die horizontale Gerade $\boldsymbol{y = A}$ ist eine **horizontale Asymptote** für den Graphen von $\boldsymbol{f}$, wenn $\boldsymbol{x \to \infty}$.

Die horizontale Gerade $\boldsymbol{y = B}$ ist eine **horizontale Asymptote** für den Graphen von $\boldsymbol{f}$, wenn $\boldsymbol{x \to -\infty}$.

Beispiel 5(a): Untersuchen Sie die Grenzwerte für x → Unendlich

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$$

Lösung:

Wenn x eine große positive oder negative Zahl, dominiert $3x^2$ im Zähler und x^2 im Nenner.
Daher verhält sich $f(x)$, wenn $|x|$ groß ist, wie $3x^2/x^2 = 3$.

$$f(x) \to 3\,, \qquad \text{wenn} \quad |x| \to \infty$$

Formaler Beweis:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \frac{3 + \overbrace{(1/x)}^{\to 0} - \overbrace{(1/x^2)}^{\to 0}}{1 + \underbrace{(1/x^2)}_{\to 0}} \to 3 \quad \text{für } |x| \to \infty$$

Es gelte: $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to x_0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) \to \infty & \text{für } x \to x_0 \\ f(x)g(x) \to \infty & \text{für } x \to x_0 \\ f(x) - g(x) \to \,? & \text{für } x \to x_0 \\ f(x)/g(x) \to \,? & \text{für } x \to x_0 \end{cases}$$

Siehe Beispiel 6!

Beispiel 6:

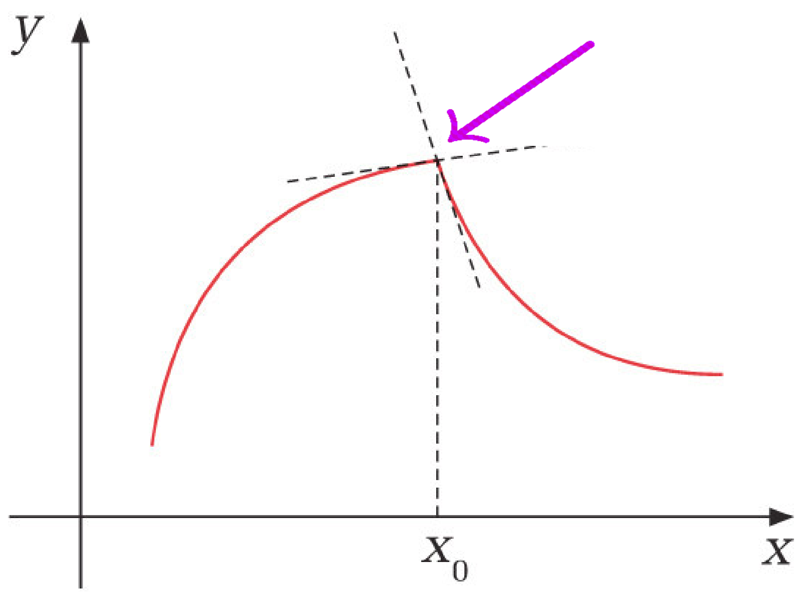
$$f(x) = 1/x^2 \to \infty \qquad g(x) = 1/x^4 \to \infty \quad \text{für} \quad x \to 0$$

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte für $x \to 0$.

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = \frac{x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4} = \frac{\overbrace{x^2 - 1}^{\to -1}}{\underbrace{x^4}_{\to 0}} \to -\infty$$

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} = \frac{\overbrace{1 - x^2}^{\to 1}}{\underbrace{x^4}_{\to 0}} \to \infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/x^2}{1/x^4} = x^2 \to 0 \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1/x^4}{1/x^2} = \frac{1}{x^2} \to \infty$$



Die Funktion $\boldsymbol{f}$ ist **stetig** an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$.

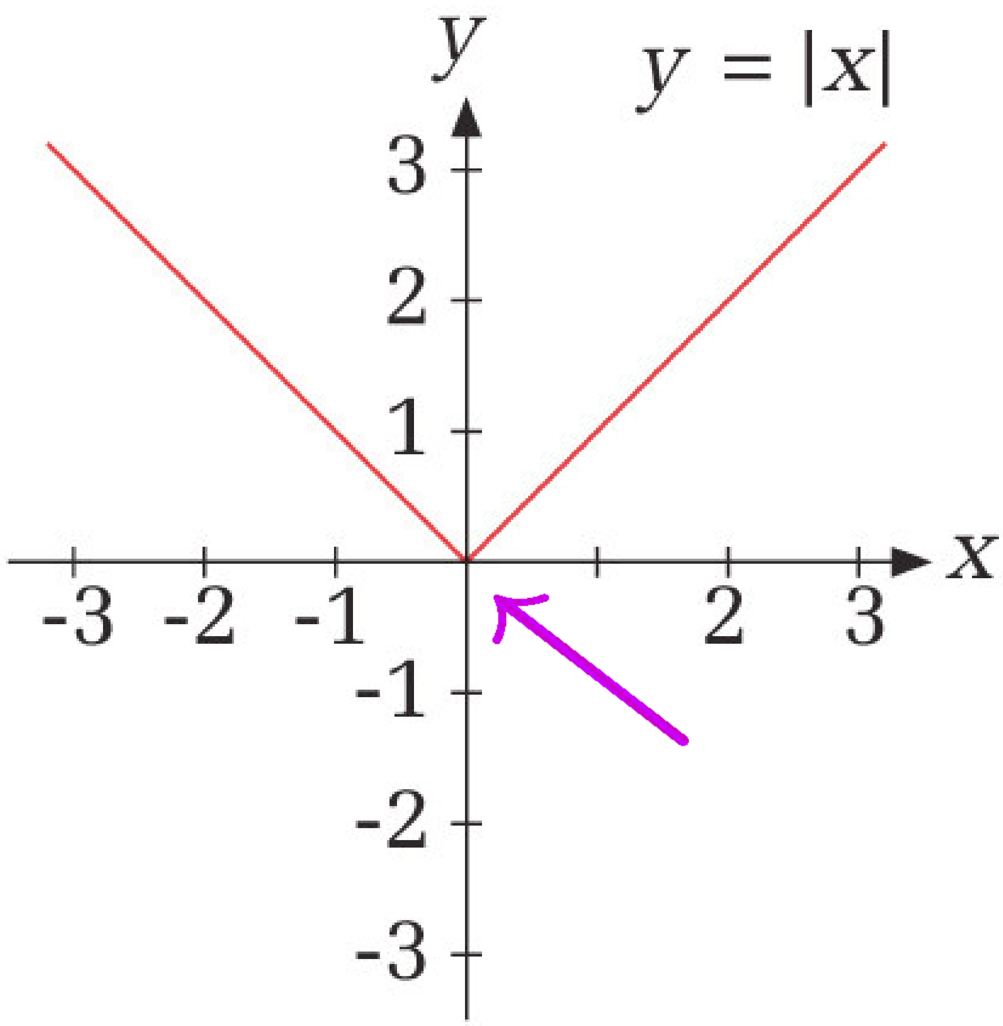
Der Graph hat **keine eindeutige Tangente** in $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}))$.

$\boldsymbol{f}$ ist also **nicht** **differenzierbar** an der Stelle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$.

$\boldsymbol{f}$ ist jedoch **stetig** an der Stelle $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$.

Wenn $\boldsymbol{f}$ **differenzierbar** in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$, dann ist $\boldsymbol{f}$ **stetig** in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$.

Die Betragsfunktion ist nicht differenzierbar an der Stelle x = 0



Rechtsseitige und linksseitige Ableitung

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \textbf{Rechtsseitige Ableitung}$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \textbf{Linksseitige Ableitung}$$

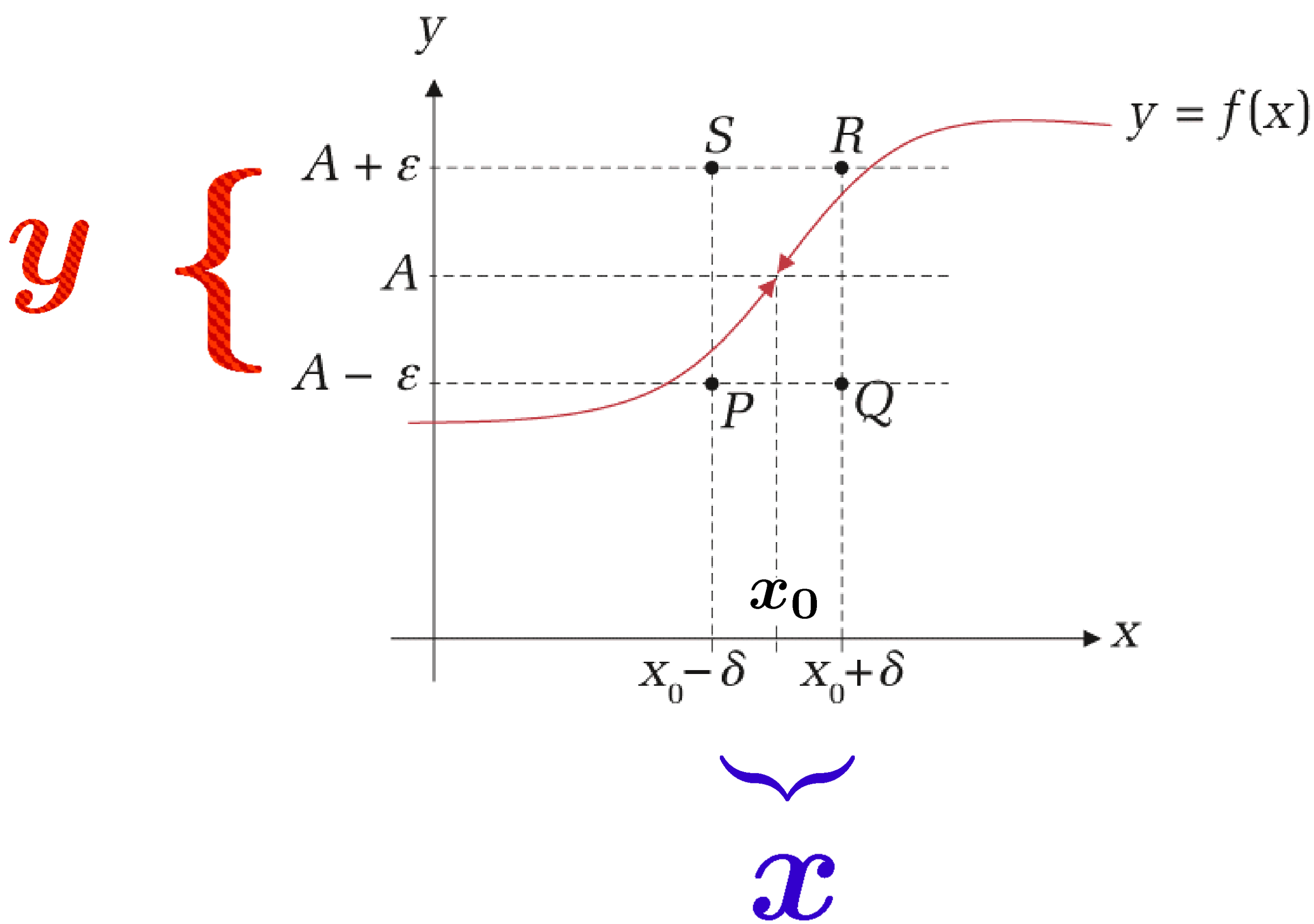
Wenn f an der Stelle x_0 **stetig** ist und **links- und rechtsseitige Ableitungen** hat mit $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$, sagt man, dass f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ einen **Knick** hat.

Mathematisch exakte Definition von Grenzwerten

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ bedeutet, dass $f(x)$ so nah wie möglich an A gewählt werden kann, wenn wir nur x genügend nah an (aber nicht gleich) x_0 wählen. (Kap. 6.5)

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ bedeutet, dass $|f(x) - A|$ so klein gewählt werden kann, wie wir wollen, wenn nur $|x - x_0|$ $(x \neq x_0)$ hinreichend klein gewählt wird.

3. Wir sagen, dass $f(x)$ den Grenzwert A hat (oder gegen A strebt), wenn für <u>**jede**</u> Zahl $\epsilon > 0$ <u>**eine**</u> Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - A| < \epsilon$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$. (Abbildung 6)


y
y = f(x)
S
R
A + ε
A
A − ε
P
Q
x₀
x
x₀ − δ
x₀ + δ
y
x

Sei $\boldsymbol{f}$ eine **stetige Funktion** auf dem Intervall $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Die **Vorzeichen** von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ und $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ seien **verschieden**, z.B. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) < \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) > \mathbf{0}$.

Dann gibt es **mindestens einen Punkt** $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$.

Andere Formulierung in Kombination mit dem Extremwertsatz (8.4.1):

Eine auf $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ **stetige Funktion** $\boldsymbol{f}$ **nimmt** in diesem Intervall ihr **Maximum und Minimum an**.

Jeder Zwischenwert zwischen dem **kleinsten** und **größten** Funktionswert wird in **mindestens** einem Punkt des Intervalls von der Funktion $\boldsymbol{f}$ angenommen.

Zwischenwertsatz garantiert die **Existenz von Lösungen** einer Gleichung, die nicht explizit gelöst werden kann.

Beispiel 1:

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^6 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ **mindestens eine Lösung** c zwischen 0 und 1 hat.

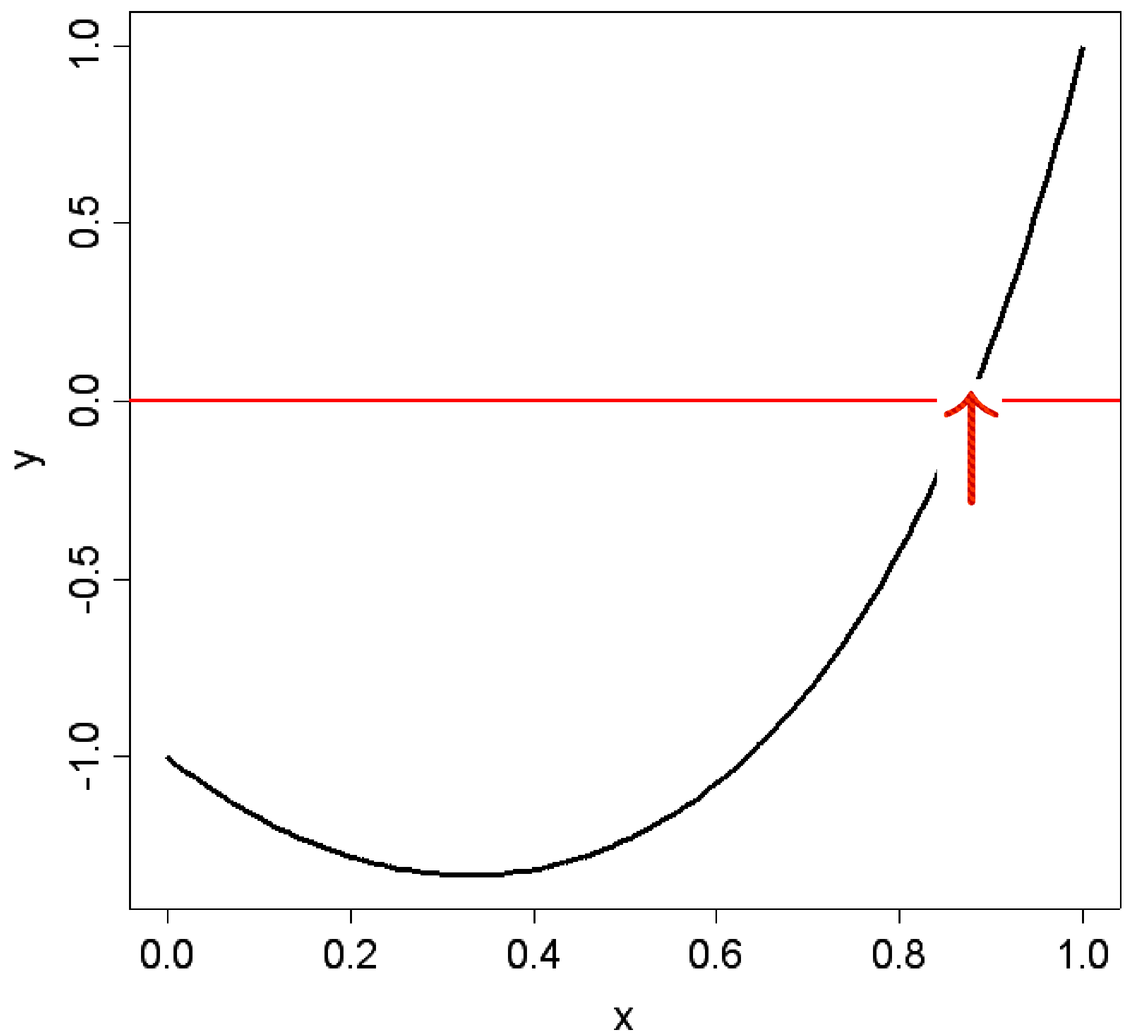
Lösung:

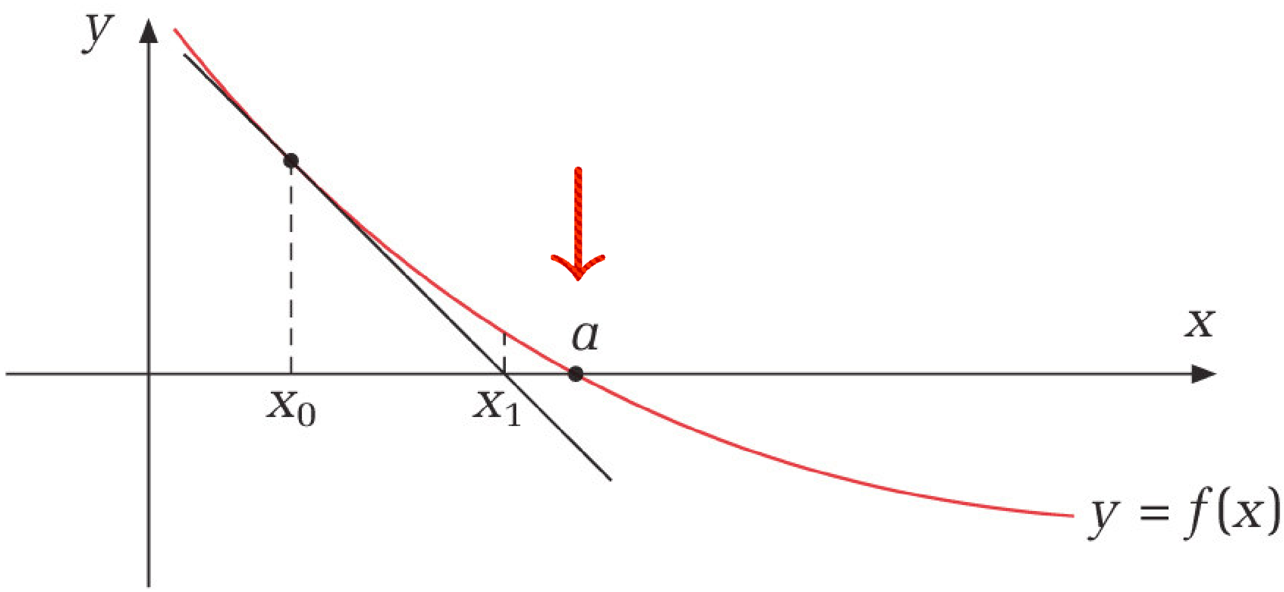
$f(x) = x^6 + 3x^2 - 2x - 1$ ist ein Polynom, daher stetig für alle x, insbesondere in $[0, 1]$.

Es gilt: $f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) = 1 > 0$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert mindestens eine Zahl c in $(0, 1)$ mit $f(c) = 0$.

Graph zu Beispiel 1





Funktion $\boldsymbol{f}$ hat **Nullstelle** an der Stelle $\boldsymbol{x = a}$.

Jedoch ist $\boldsymbol{a}$ **unbekannt**.

Wir beginnen mit $\boldsymbol{x_0}$ als erster Abschätzung für $\boldsymbol{a}$.

Wie können wir die Abschätzung verbessern, so dass wir uns $\boldsymbol{a}$ annähern?

Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

1. Beginne mit $\boldsymbol{x_0}$ als 1. Näherung für $\boldsymbol{a}$ (nicht zu weit von $\boldsymbol{a}$, wenn möglich)
   (a) Betrachte die Tangente an den Graphen im Punkt $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f(x_0)})$.
   (b) Bestimme den Schnittpunkt $\boldsymbol{x_1}$ der Tangente mit der $\boldsymbol{x}$-Achse.
2. Verwende $\boldsymbol{x_1}$ als 2. Näherung für $\boldsymbol{a}$
   (a) Betrachte die Tangente an den Graphen im Punkt $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{f(x_1)})$.
   (b) Bestimme den Schnittpunkt $\boldsymbol{x_2}$ der Tangente mit der $\boldsymbol{x}$-Achse.
3. Verwende $\boldsymbol{x_2}$ als 3. Näherung für $\boldsymbol{a}$
   (a) usw.

Die Folge der Punkte $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \dots}$ **konvergiert** gewöhnlich sehr schnell gegen $\boldsymbol{a}$.

Steigung der Tangente in x_0 ist $f'(x_0)$.

Gleichung der Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$ ist:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Im Schnittpunkt mit der x-Achse ist $y = 0$ und $x = x_1$, d.h.

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Auflösen nach x_1 ergibt:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dasselbe für x_1 ergibt:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Die nach dem Newton-Verfahren erzeugten Punkte sind durch die folgende Formel gegeben:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, \ldots}$$

falls $f'(x_n) \neq 0$.

Beispiel 3: Finden Sie eine Näherung für die Nullstelle von

$f(x) = x^6 + 3x^2 - 2x - 1$ im Intervall $[0, 1]$ (Beispiel 1).

Wenden Sie das Newton-Verfahren einmal an.

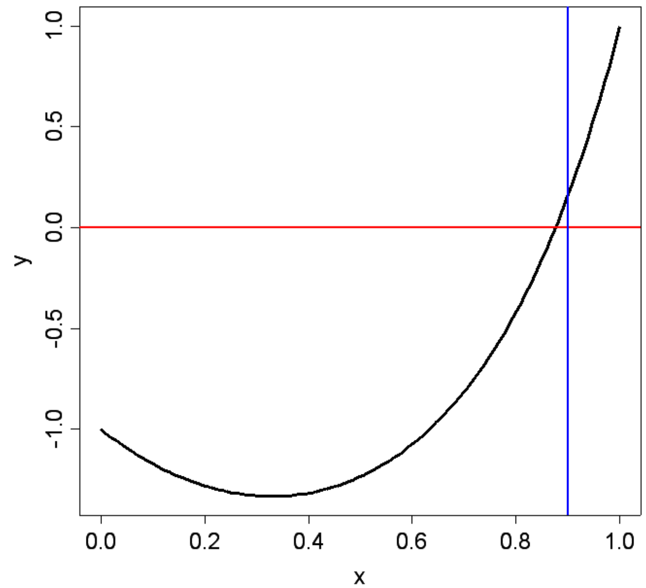
Lösung:

Wählen Sie $x_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_0) = f(1) = 1$

$f'(x) = 6x^5 + 6x - 2 \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = 10$

Nach dem Newton-Verfahren für $n = 0$ folgt:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$$



$f(x) = x^6 + 3x^2 - 2x - 1$ im Intervall $[0, 1]$ (Beispiel 1).

Wenden Sie das Newton-Verfahren zweimal an.

Lösung:

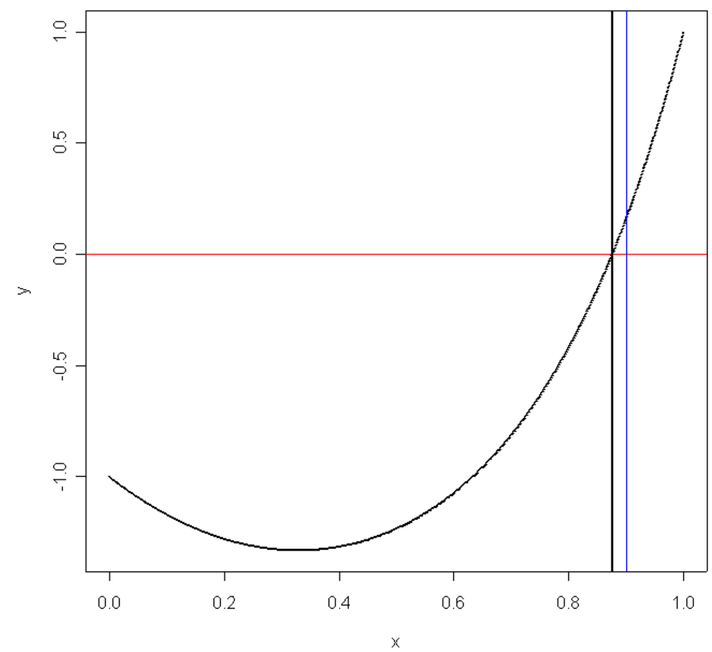
Wählen Sie $x_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_0) = f(1) = 1$

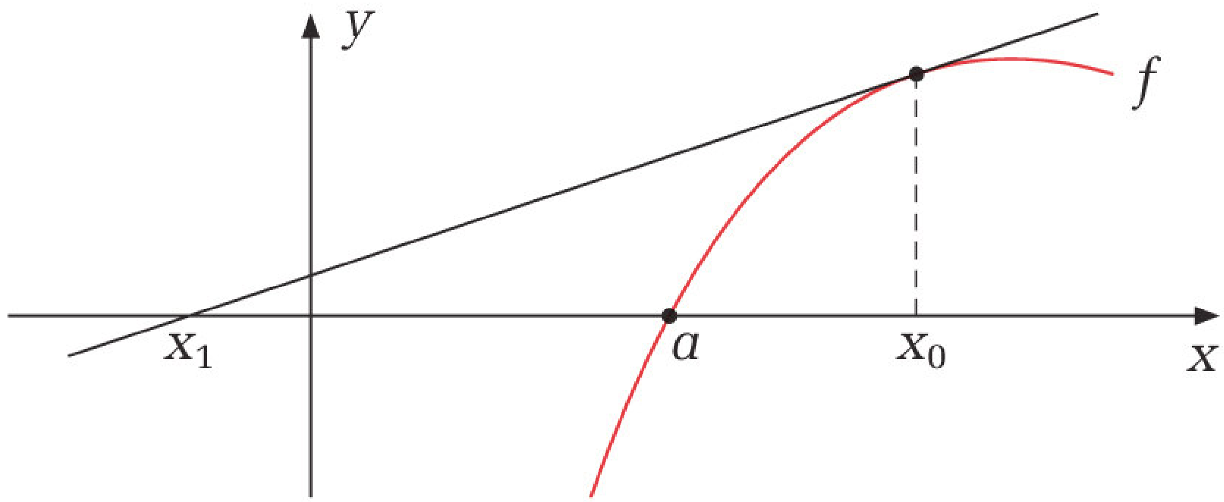
$f'(x) = 6x^5 + 6x - 2 \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = 10$

Nach dem Newton-Verfahren für $n = 0$ folgt:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$$

$$x_2 = 0.9 - \frac{f(0.9)}{f'(0.9)} \approx 0.8767475$$





- In den meisten Fällen funktioniert das Newton-Verfahren, d.h.
- Die Folge der Punkte x_n konvergiert gegen die Nullstelle.
- Es kann passieren, dass x_n nicht konvergiert.
- In Abbildung ist x_0 schlecht gewählt.
- Die Steigung der Tangente darf (absolut) nicht zu klein sein.

Newton-Methode: **Folge** von Punkten: $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots}$, d.h. wir haben eine **Funktion**, die jeder natürlichen Zahl $\boldsymbol{n}$ eine Zahl zuordnet.

Bezeichnen wir eine solche **Funktion** mit $\boldsymbol{s}$. Dann ist $\boldsymbol{s(1), s(2), s(3), \ldots, s(n), \ldots}$ eine **UNENDLICHE FOLGE**.

Wir schreiben auch: $\boldsymbol{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots}$ und verwenden für eine beliebige **unendliche Folge** die Notation:

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{oder einfach} \quad \{s_n\}$$

Wenn z.B. $s_n = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dann ist die **Folge**

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

Wenn wir nur n genügend groß wählen, so wird $1/n$ so klein, wie wir wollen, d.h. die **Folge KONVERGIERT gegen 0**.

Eine **Folge** $\{s_n\}$ **KONVERGIERT** gegen eine Zahl s, wenn s_n beliebig nahe an s gewählt werden kann, wenn nur n hinreichend groß ist.

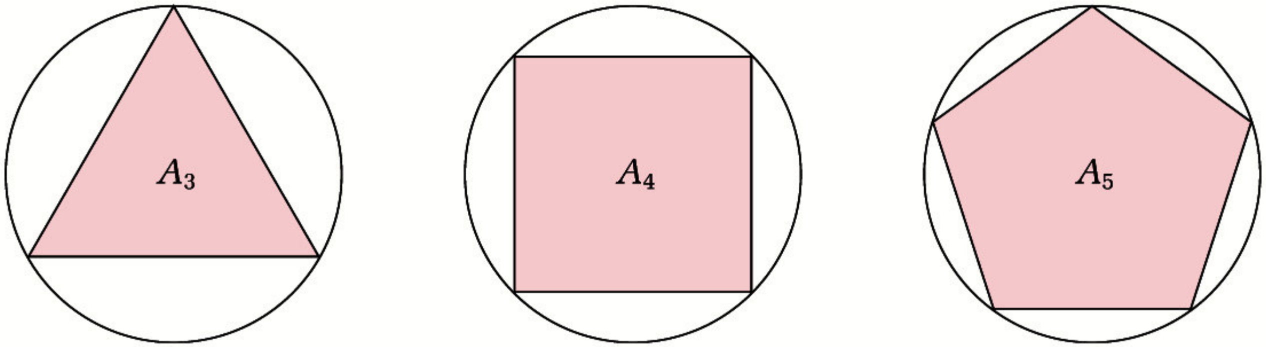
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} s_n = s \quad \text{oder} \quad s_n \to s, \quad \text{wenn} \quad n \to \infty}$$

Eine **Folge** **DIVERGIERT**, wenn sie **nicht** gegen eine reelle Zahl **konvergiert**.

Beispiele für divergente Folgen:

$$\{2^n\}_{n=0}^{\infty} \qquad \text{und} \qquad \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$$

Beispiel 1:



Für $n \geq 3$ sei A_n die Fläche eines regulären in einen Kreis mit Radius 1 einbeschriebenen n-Polygons.

$n = 3$: Dreieck $n = 4$: Quadrat $n = 5$: Fünfeck (Pentagon)

Je größer n, desto größer A_n, jedoch jedes $A_n \leq \pi$.

Die Differenz zwischen A_n und π kann beliebig klein gemacht werden, wenn n hinreichend groß gewählt wird.

$$A_n \to \pi, \qquad \text{wenn} \qquad n \to \infty$$

Beispiel 2:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} = e = 2.7182818\ldots \tag{6.11.4}$$

Wir setzen: $\Delta x = 1/n \qquad n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x \to 0$

Einsetzen in obige Formel ergibt:

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Einfachster Fall: Was ist der **Grenzwert** von

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

wenn $f(x_0) = g(x_0) = 0$?

Wir schreiben dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{0}{0}“$$

Solch ein **Grenzwert** ist eine **unbestimmte Form vom Typ 0/0**, d.h. der Grenzwert kann **nicht ohne weitere Untersuchungen** bestimmt werden

Wir betrachten eine unbestimmte Form

$$f(x)/g(x)\,,$$

wobei f und g differenzierbar sind mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Sei $x \neq x_0$ und $g(x) \neq g(x_0)$, ferner $g'(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{[f(x) - f(x_0)]\,/(x - x_0)}{[g(x) - g(x_0)]\,/(x - x_0)} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{wenn} \quad x \to x_0$$

Wenn $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beispiel 1:

Zeigen Sie mit der Regel von L'Hôspital (vgl. Beispiel 6.5.1):

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

<u>Lösung:</u>

$$f(0) = e^0 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad g(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x \ \text{ und } \ g'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = g'(0) = 1$$

<u>Regel von L'Hôspital:</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Beispiel 3: Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{xt} - 1 - xt}{x^2}$$

Lösung:

Zähler und Nenner sind Null für $x = 0$.

Anwendung der Regel von L'Hôspital ergibt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{xt} - 1 - xt}{x^2} = „\frac{0}{0}“ = \lim_{x\to 0} \frac{te^{xt} - t}{2x}$$

Zähler und Nenner sind wieder Null für $x = 0$.

Anwendung der Regel von L'Hôspital ergibt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{te^{xt} - t}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{t^2 e^{xt}}{2} = \frac{1}{2} t^2$$

Wenn $f'(x_0)/g'(x_0)$ ebenfalls vom Typ $0/0$ differenziert man ein zweites Mal, evtl. auch drei- oder viermal oder noch öfter.

Warnungen:

1. **Prüfen** Sie: Liegt **wirklich** eine **unbestimmte Form** vor? **Andernfalls** ergibt die Regel gewöhnlich ein **fehlerhaftes Resultat**.

2. **Differenzieren Sie nicht f/g als einen Quotienten**, sondern **berechnen Sie** stattdessen f'/g'.

Das Resultat gilt unter schwächeren Voraussetzungen:

Außer in x_0 seien die Funktionen f und g differenzierbar in einem Intervall (α, β), das x_0 enthält. Es gelte $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$, wenn $x \to x_0$. Wenn $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$ in (α, β) und $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x) = L$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Dies gilt, wenn L endlich ist und auch, wenn $L = \pm\infty$.

x_0 darf auch ein Endpunkt des Intervall sein oder auch $\pm\infty$.

Regel gilt auch für unbestimmte Formen vom Typ $\pm\infty / \pm\infty$.

Regel gilt auch für unbestimmte Formen vom Typ $\pm\infty / \pm\infty$.

<u>Beispiel:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-3x^2}{5x^2+x-1} = „\frac{-\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{10x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{10x+1} = „\frac{-\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$a > 1 \quad \Rightarrow \quad a^x \to \infty\,, \quad \text{wenn} \quad x \to \infty$

z.B. $(1.0001)^x \to \infty\,, \quad \text{wenn} \quad x \to \infty$

$p > 0 \quad \Rightarrow \quad x^p \to \infty\,, \quad \text{wenn} \quad x \to \infty$

z.B. $x^{1000} \to \infty\,, \quad \text{wenn} \quad x \to \infty$

Welcher Ausdruck a^x oder x^p geht schneller gegen ∞?

Es gilt:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \qquad (a > 1, p > 0)}$$

z.B. $x^2/e^x \to 0 \quad \text{und} \quad x^{10}/(1.1)^x \to 0\,, \quad \text{wenn} \quad x \to \infty$

Für jede Basis $a > 1$ wächst die Exponentialfunktion a^x schneller als jede Potenz x^p von x. (Für $p \leq 0$ ist der Grenzwert 0.)